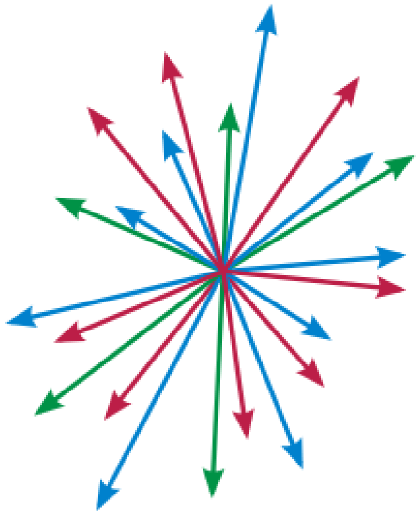
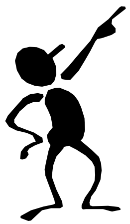


T7Alg: ESPACIOS VECTORIALES

Algunos **sistemas de ecuaciones lineales** tienen **infinitas soluciones** que pueden conformar un conjunto de vectores llamado **espacio vectorial**.



Este concepto, muy utilizado en los dispositivos digitales, emplean algoritmos que **detectan y corrigen errores** en la transmisión de datos.

TEMA 7- VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES

> Espacios y subespacios vectoriales
> Combinaciones lineales, independencia lineal y espacios generados
> Bases y dimensión. Cambio de Base.
> Subespacios de una matriz A: Fil A, Col A, Nul A.

Contexto:

Espacio vectorial **R^n**

conjunto de vectores de n-tuplas

ESPACIO VECTORIAL (EV)

Estructura matemática formada por un conjunto de **vectores**, y dos operaciones, la **suma y el producto por escalar** que, aplicadas a elementos del conjunto, vectores, obtienen **otro vector.**

➔ **Suma** (op. Interna)

u + v

Conmutativa,

Asociativa,

Distributiva,

E. Neutro

E. opuesto

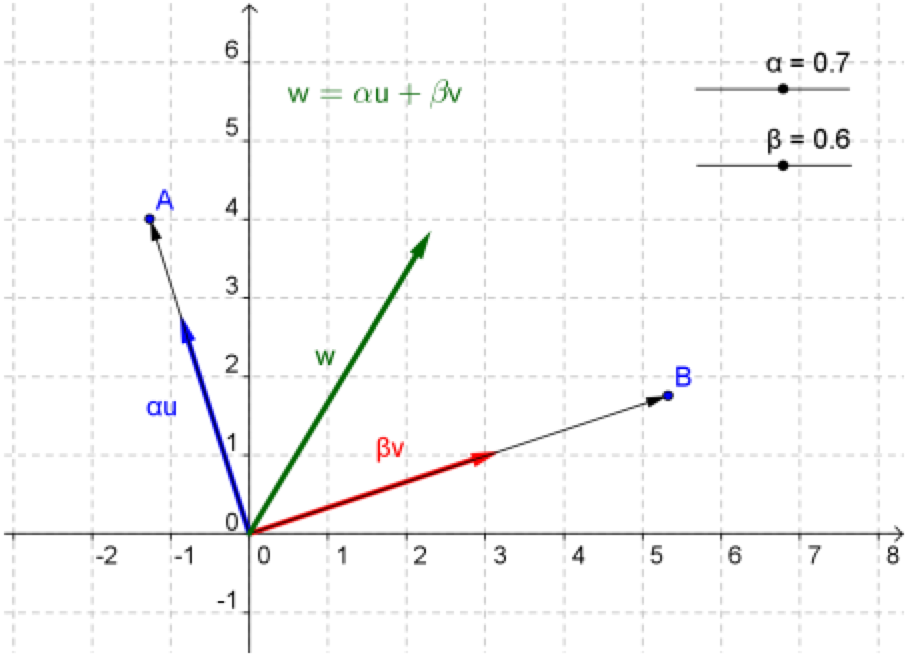
➔ **Producto escalar** (op. Externa)

α v

Asociativa,

Distributiva,

E. Unidad



Trabajaremos con el espacio vectorial R^n

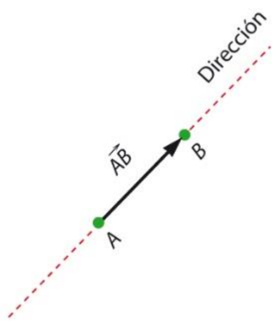
formado por vectores :

$$u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$$

Dependiendo del valor de n tenemos diferentes espacios:

Si $n=2 \rightarrow u = (u_1,u_2)$ es un vector de R^2
Si $n=3 \rightarrow u = (u_1,u_2,u_3)$ es un vector de R^3

VECTORES EN EL PLANO R^2



VECTORES EN EL ESPACIO R^3

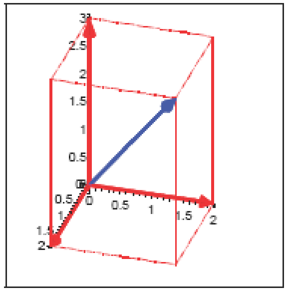


Figura 1: Componentes de un Vector

Aunque haremos mención a un espacio vectorial con el nombre genérico V sus elementos serán los del espacio vectorial R^n

Para un EV buscaremos

subconjuntos de vectores

con los que podamos obtener

elementos del EV **>>**

Buscaremos

subespacios vectoriales

Todo EV tiene, al menos, dos subespacios, él mismo y el subespacio {0}

Sea **V** un **EV**,

S es un **subespacio vectorial** de V

Si **S**

- Es un subconjunto no vacío de **V.**
- Contiene el **vector 0**
- Sus elementos se pueden **sumar y multiplicar por un escalar**

Procedimiento para demostrar que un subconjunto **S** de un EV, **V**, es un subespacio vectorial.

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, $\forall u \in S, \alpha \in R$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}$, $\forall u, v \in S$

1. Comprueba cuál de los siguientes conjuntos es subespacio vectorial de R^3

1. $A = \{ (x, y, z): x,y,z \in R /\ x\, y = 1 \}$ **No (0,0,0,) $\in$ A**
2. $A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R /\ x - y + z = 0 \}$ **A $\in$ R^3**
3. $A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R / x +2y + z = 1 \}$ **No (0,0,0,) $\in$ A**
4. $A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R / x – y = 0, x - z = 0 \}$ **A $\in$ R^3**
5. $A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R / x – y + z = 0, y + z = 1 \}$ **No (0,0,0,) $\in$ A**
6. $A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R / x = 0, y = z \}$

Un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ es un **subespacio vectorial** de V si:

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, $\forall u \in S, \alpha \in R$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}$, $\forall u, v \in S$

Ej1.T7

2. Estudia si A es subespacio vectorial de R^3

$$A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R \,/\, x - y + z = 0 \}$$

a) Vector nulo, $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ **?**

$\mathbf{(0, 0, 0)}$ >> $x - y + z = 0$ >> $0 - 0 + 0 = 0$

b) Vector genérico u = (x1,y1,z1), $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{u} \in \mathbf{A}$

$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{(x1,y1,z1)} = (\alpha x1, \alpha y1, \alpha z1)$ >> $\alpha x1 - \alpha y1 + \alpha z1 \;\; \mathbf{= 0}$

>> $\alpha(x1 - y1 + z1) = 0$ >> $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{0 = 0}$

c) Vectores genéricos u = (x1,y1,z1), v = (x2,y2,z2), $\mathbf{u + v \in A}$

$\mathbf{u + v}$ = (x1,y1,z1) + (x2,y2,z2) **=** (x1+x2, y1 + y2, z1 + z2)

>> (x1+x2) – (y1 + y2) + (z1 + z2) =

(x1 – y1 + z1) + (x2 – y2 + z2) = 0

u + v

Un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ es un **subespacio vectorial** de V si:

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, $\forall u \in S, \alpha \in R$

c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S}$, $\forall u, v \in S$

Ej1.T7

4. Estudia si A es subespacio vectorial de R^3

$$A = \{ (x, y, z) : x,y,z \in R \;/\; x - y = 0,\; x - z = 0 \}$$

a) Vector nulo , $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ **?**

$$\mathbf{(0, 0, 0)} \gg x - y = 0 \gg 0 - 0 = 0$$
$$x - z = 0 \gg 0 - 0 = 0$$

b) Vector genérico $u = (x1,y1,z1) \in R$, $\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{u} \in \mathbf{A}$

$$\boldsymbol{\alpha(x1,y1,z1)} = (\alpha x1, \alpha y1, \alpha z1) \gg \alpha x1 - \alpha y1 \mathbf{= 0 \gg} \alpha(x1 - y1) \mathbf{= 0}$$
$$\gg \alpha x1 - \alpha z1 \mathbf{= 0 \gg} \alpha(x1 - z1) \mathbf{= 0}$$

c) Vectores genéricos $u = (x1,y1,z1)$, $v = (x2,y2,z2) \in R$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{A}$

$$\mathbf{u + v} \quad = (x1,y1,z1) + (x2,y2,z2) = (x1+x2,\; y1 + y2,\; z1 + z2)$$
$$(x1+x2) - (y1 + y2) = 0 \gg (x1-y1) + (x2-y2) = 0$$
$$(x1 + x2) - (z1 + z2) = 0 \gg (x1-z1) + (x2-z2) = 0$$

Estudia si los conjuntos son espacios vectoriales de R^3

Para cada conjunto decide la opción correcta

S1 = { (x,y,1): x,y $\in$ R / x + y = 0 }

a. No contiene el vector 0

S2 = { (a, 0, a -1): a $\in$ R }

a. No contiene el vector 0

S3 = { (x,y,z): x,y,z $\in$ R / y - x + 4z = 0 }

d. Sí es un subespacio

S4 = { (x, y, z): x,y,z $\in$ R / x – y + z = 0, y + z = 1 }

a. No contiene el vector 0

Opciones:
a. No, no contiene el vector 0.
b. No, la suma no pertenece al subespacio
c. No, la multiplicación por escalar no pertenece al subespacio
d. Sí es un subespacio, cumple todas las propiedades

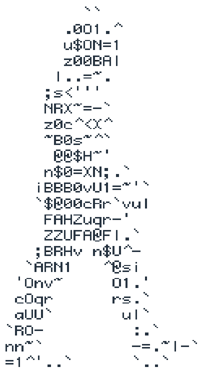
>> Vemos cómo generar subespacios vectoriales

del espacio vectorial R^n

Conceptos necesarios:

>> Combinación Lineal de vectores

>> Independencia entre vectores



COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES N-DIMENSIONALES

Un vector **v** $\in$ R^n es <u>combinación lineal</u> (CL) de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_p$

si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ /

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots \alpha_p \mathbf{u}_p$$

Ejemplo

a) $(1,2) \in R^2$ es CL de $(1,0)$ y $(0,1)$ ya que $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

b) $(2,1,1) \in R^3$ no es CL de los vectores $(1,0,0)$ y $(1,1,0)$ ya que:

$$(2,1,1) \neq a(1,0,0) + b(1,1,0)$$

Falla $1 = 0.a + 0.b$

***Nota**: Cualquier vector en el plano se puede poner como CL de otros dos vectores que tengan distinta dirección. Esta combinación lineal es única.*

Cómo expresar un vector de R^n como CL de otros vectores

Lo vemos en R^3

Sean los vectores **x, u, v, w** $\in$ $\mathbf{R^3}$

Expresamos **x** como CL de **u, v, w** a partir de la ecuación paramétrica

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w}$$

Se sustituye cada vector por sus coordenadas y se resuelve un SEL cuyas incógnitas son $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$

$$x_1 = \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \alpha_3 u_{13}$$
$$x_2 = \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{23}$$
$$x_3 = \alpha_1 u_{31} + \alpha_2 u_{32} + \alpha_3 u_{33}$$

Si el sistema es SCD → v es **CL** de los vectores u_i de forma ÚNICA

Si el sistema es SCI → v es **CL** de los vectores u_i de infinitas formas

Si el sistema es INCOMPATIBLE → v NO es CL de los vectores u_i

Ej2a.T7

Comprueba si el vector u = (4,5,4) es CL de S = { (1,1,1), (1,-2,0), (3,-2,1) }

Ecuación paramétrica: (4,5,4) = a(1,1,1) + b(1,-2,0) + c(3,-2,1)

SEL :

$$\begin{aligned} a + b + 3c &= 4 \\ a - 2b - 2c &= 5 \\ a \quad\quad + c &= 4 \end{aligned}$$

Resuelve SL :

A|u

1	1	3	**4**
1	-2	-2	**5**
1	0	1	**4**

rref A|u

1	0	0	3
0	1	0	-2
0	0	1	1

Los vectores se ponen en columnas.
En la última el vector que es CL

Solución :

SCD
a = 3
b = -2
c = 1

¿ vector u como CL de vectores de S ?

(4,5,4) = 3(1,1,1) + (-2)(1,-2,0) + 1(3,-2,1)

Ej2b.T7

Comprueba si u = (25, 22, 8) es CL de $v_1 = (3,4,2)$ y de $v_2 = (5,3,2)$

Ecuación paramétrica: $(25,22,8) = a(3,4,2) + b(5,3,2)$

Plantea SL :

$$\begin{aligned} 3a + 5b &= 25 \\ 4a + 3b &= 22 \\ 2a + 2b &= 8 \end{aligned}$$

Resuelve SL :

$$A|u \quad \begin{matrix} 3 & 5 & 25 \\ 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 8 \end{matrix} \qquad \text{rref } A|u \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Solución : No hay forma de combinar v_1 y v_2 para obtener u

¿ vector u como CL de vectores de S ? El vector u NO es CL de los vectores v_1 y v_2

Ej3.T7

Determina el valor de $k \in R$ para que el vector $u = (1, k, 5) \in R^3$ pertenezca al subespacio $S = \{ (1, 2, 3), (1, 1, 1) \}$

Ecuación paramétrica: $(1,k,5) = a(1,2,3) + b(1,1,1)$

SEL :

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= k \\ 3a + b &= 5 \end{aligned}$$

Resuelve SL :

A|u

1	1	1
2	1	k
3	1	5

rref A|u

Solución :

¿ vector u como CL de vectores de S ?

Buscamos un subconjunto de vectores que pueda "**generar**" **todo** el espacio vectorial al que pertenece.

Conjunto generador / Envoltura Lineal de un SEV

Sea **$S = \{ u_1,\ldots,u_p \}$ / $u_i \in R^n$** .

S es un **conjunto generador** de R^n si mediante CL de sus vectores se generan todos los demás vectores de R^n.

El conjunto de **todas las CL** de S se conoce como la **Envoltura lineal** de S

$$\mathbf{Env\ (S) = Env\ \{ u_1,\ldots,u_p \}}$$

>> **Env {0} = {0}**

>> La envoltura es un conjunto **infinito** de vectores.

>> Todo EV posee un **nº finito de vectores** que lo generan

>> Si **v es CL** de $\{ u_1,\ldots,u_p \}$ entonces **$Env\ \{ u_1,\ldots,u_p\ v \} = Env\ \{ u_1,\ldots,u_p \}$**

Un conjunto de vectores puede generar

todo o una parte (subespacio) de $\mathbf{R}^n$.

Procedimiento para determinar si un conjunto de vectores **genera** un **espacio vectorial**

Sea V un espacio vectorial.

Paso1: Se selecciona un vector arbitrario $v \in V$ / $v = (v_1, v_2, v_3 \ldots)$

Paso2: Se determina si **v es CL** de los vectores $\mathbf{u_1, \ldots u_k}$

Si **v** es CL >> $u_1, \ldots, u_k$ generan a V.

Si **v** no es CL >> $u_1, \ldots, u_k$ **no** generan a V.

Comprueba que Env { $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$ } generan R^3

Ej4a.T7

Se comprueba si un vector genérico: $(a, b, c) \in R^3$ es CL de u_1, u_2 u_3

1	1	0	a
1	0	1	b
0	1	1	c

1	0	0	(a+b-c)/2
0	1	0	(a-b+c)/2
0	0	1	(-a+b+c)/2

SCD para cualquiera valor de a, b, c

Luego los vectores u_1, u_2 u_3 generan todo R^3

Comprueba si los vectores $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ generan R^3

Ej4b.T7

Se comprueba si un vector genérico: $(a, b, c) \in R^3$ es CL de u_1, u_2 →

1	0	a
0	1	b
1	1	c

El sistema es:

Env { (1,0,1), (0,1,1) } =

Comprueba si los vectores $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ generan R^3

Ej4b.T7

Se comprueba si un vector genérico: $(a, b, c) \in R^3$ es CL de u_1, u_2 →

1	0	a
0	1	b
1	1	c

1	0	a
0	1	b
0	0	c - a - b

El sistema es **compatible** cuando $\mathbf{c - a - b = 0}$, luego

$$\mathbf{Env\{(1,0,1),(0,1,1)\} = \{(a,b,c) \in R^3 \,/\, c - a - b = 0\}}$$

Calcula Env (S) / $S = \{ u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,0) \}$ en R^3

Ej5.T7

Se comprueba si un vector genérico: (v_1, v_2, v_3) de R^3 es CL de u_1, u_2

Ecuación paramétrica: $(v_1, v_2, v_3) = a\,(1,0,0) + b\,(0,1,0)$

Plantea SEL

$$\begin{aligned} a &= v_1 \\ b &= v_2 \\ 0 &= v_3 \end{aligned}$$

Resuelve SEL

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \end{array}$$

Solución

Si $v_3 = 0$ >> **SCD**

$b = v_2$

$a = v_1$

Env(S) $= \text{Env}\ \{ (1,0,0)\ ,\ (0,1,0) \} = \{ (v_1, v_2, 0) : v_1, v_2 \in R\}$

Ej6.T7

Dados $u = (2,5,-1)$, $v = (-4,-10,2)$
Determina qué vector $w_i \in Env(u,v)$

$w_1 = (0,0,0)$	
$w_2 = (-2,-5,1)$	
$w_3 = (-4,-10,2)$	
$w_4 = (1,2,3)$	

Ej6.T7

Dados u = (2,5,-1), v = (-4,-10,2)
Determina qué vector $w_i \in$ Env(u,v)

w_1 = (0,0,0)	Si
w_2= (-2,-5,1)	Si
w_3= (-4,-10,2)	Si
w_4= (1,2,3)	No

$$\begin{array}{ccc} & & w_1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{rref} & & \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(SEL:SCI)

$$\begin{array}{ccc} & & w_2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 5 & -10 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{rref} & & \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(SEL:SCI)

$$\begin{array}{ccc} & & w_3 \\ 2 & -4 & -4 \\ 5 & -10 & -10 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{rref} & & \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(SEL:SCI)

$$\begin{array}{ccc} & & w_4 \\ 2 & -4 & -4 \\ 5 & -10 & -10 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{rref} & & \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(SEL:SI)

Una vez que sabemos cómo encontrar el subconjunto de vectores **S** $\subseteq$ **V** que generan todo el espacio vectorial **V**, debemos averiguar cuál es el **mínimo número de vectores que generan V.**

Para ello **quitaremos** del conjunto **S** los vectores que sean **dependientes** **(CL** de otros) p. ej. si tengo (1,2,3) y (2,4,6) me quedaré con uno de ellos no serán necesarios los dos, yq que (2,4,6) = 2(1,2,3)

Comprobamos que Env {(2,0), (1,3), (2,1), (5,4)} = Env {(2,0), (1,3), (2,1)}

Ej7.T7

Sea **Env{(2,0), (1,3), (2,1)}** un sistema generador de R^2

entonces, todo vector $(a,b) \in R^2$ se puede poner como CL de Env:

$$(a,b) = \lambda\,(2,0) + \mu\,(1,3) + q\,(2,1)$$

➔ Si añadimos a Env, el vector (5,4) que es CL de (2,0), (1,3), (2,1) generamos los mismos vectores (a,b)

$$(a,b) = \lambda\,(2,0) + \mu\,(1,3) + q\,(2,1) + p\,(5,4)$$

Buscamos el **mínimo número de vectores, linealmente independientes** de la **Env(S)** que nos permita obtener cualquier otro vector de V.

Estos vectores formarán una

>> BASE de V

Base de un EV

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_p$ de un espacio vectorial **V** forman **base** para V si

>> $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_p$ **son linealmente independientes**

>> $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_p$ **generan V**

Los **vectores** que conforman una base son **distintos y no nulos**

Determinante de la matriz de vectores es **NO nulo**

Dependencia lineal entre vectores

Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** (LI) si ninguno de ellos se puede escribir con una combinación lineal de los restantes.

Ej. En R^3 el conjunto de vectores S = { (1, 0, 0) , (0, 1, 0), (0, 0, 1) } es LI

Def. $u_1 \ldots u_p \in V$ son **Linealmente Independientes (LI)** si existen escalares $a_1, \ldots a_p \in R$ **todos nulos** / $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p = 0$ (vector nulo)

$\Updownarrow$

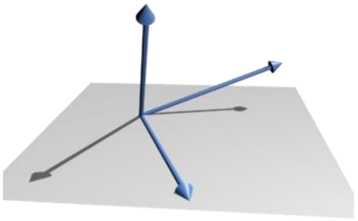
$$\forall v \in V, \quad v \notin \text{Env}\{u_1, \ldots, u_p\}.$$

v no es CL de los vectores $u_1, \ldots, u_p$

- 3 vectores son LI cuando el determinante de la matriz 3x3 que se forma con sus coordenadas es **distinto de cero**.
- El **SEL es SCD**.
- Un conjunto con un solo vector **v** es LI si y sólo si **v <> 0**

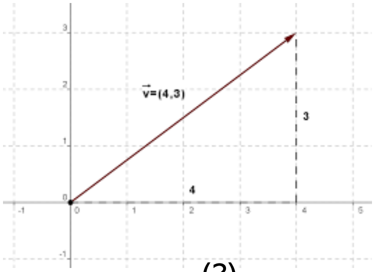
Interpretación geométrica de vectores independientes

- 3 vectores independientes no están en el mismo plano, por lo que generan un **volumen** fig.(1).



(1)

- 2 vectores independientes no tienen la misma dirección, por lo que generan un **área** fig.(2).

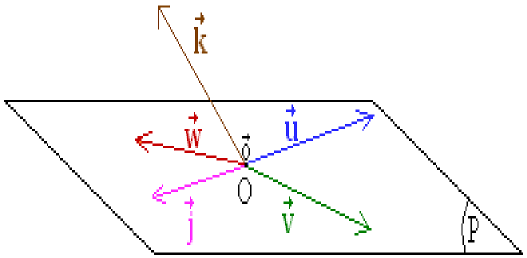


(2)

- **u, v** son independientes pq no tienen la misma dirección.

  Definen el **plano** P fig.(3)

> **u, v, k** son independientes por serlo **u** y **v** entre sí y no ser **k** una CL de ellos (no está en el plano P). Los 3 vectores definen el espacio tridimensional fig.(3)



(3)

- Los vectores LI tienen distinta dirección y sus componentes no son proporcionales.
- Los 3 vectores son las tres aristas de una figura tridimensional llamada tetraedro

Dependencia lineal entre vectores

Def. $u_1 \ldots u_p \in V$ son **Linealmente Dependientes** (LD) si existen escalares $a_1, \ldots a_p \in \mathbf{R}$,

NO todos nulos / $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p = 0$

$\Updownarrow$

$\forall v \in V, \quad v \in \text{Env}\{ u_1, \ldots, u_p \}$

v es CL de los vectores $u_1, \ldots, u_p$

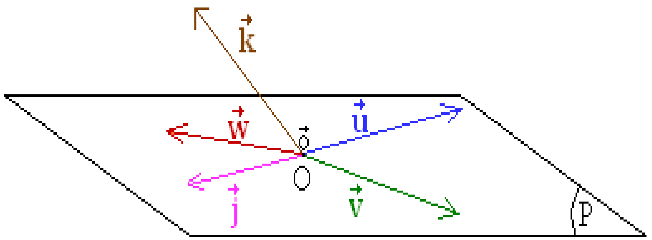
- 3 vectores son **LD** si $|A| = 0$, (determinante de la matriz A (3×3) que forman sus coordenadas), rango(A) < 3.
- **SEL es SCI**
- Los 3 vectores están inmersos en un solo plano, no hay volumen.
- Un conjunto que tenga el vector nulo es **LD**

Dependencia lineal entre vectores

Geométricamente:

> **u, j** son dependientes por tener la misma dirección.

> **u, v, w** son dependientes por estar los tres contenidos en el mismo plano.



Vectores LD están en el mismo plano

Para los conjuntos Ui de vectores de R^3 determina el tipo de figura geométrica que representa su envoltura Env{U}

Ej8.T7

A. **Un punto**
B. **Una línea**
C. **Un plano**
D. **Un volumen**
E. **Otro**

U1 = { (2,1,0), (-2,1,0), (0,2,0) }	
U2 = { (1,6,-2), (-1,-6,4), (0,0,0) }	
U3 = { (1,6,-2), (-2,1,6), (6,-2,1) }	
U4 = { (0,0,0), (0,0,0), (0,0,0) }	

L I => |A|<>0 El SEL es SCD. Componentes no proporcionales.
Vectores en un volumen

LD => |A|= 0. El SEL es SCI. Componentes proporcionales.
Vectores en un plano

Para los conjuntos Ui de vectores de R^3 determina el tipo de figura geométrica que representa su envoltura Env{U}

Ej8.T7

A. Un punto
B. Una línea
C. Un plano
D. Un volumen
E. Otro

U1 = { (2,1,0), (-2,1,0), (0,2,0) }	C (SEL:SCI) |A| =0
U2 = { (1,6,-2), (-1,-6,4), (0,0,0) }	C (SEL:SCI) |A|=0
U3 = { (1,6,-2), (-2,1,6), (6,-2,1) }	D (SEL:SCD)|A|\=0
U4 = { (0,0,0), (0,0,0), (0,0,0) }	A

L I => |A|<>0 El SEL es SCD. Componentes no proporcionales.
Vectores en un volumen
LD => |A|= 0. El SEL es SCI. Componentes proporcionales.
Vectores en un plano

PROCEDIMIENTO para determinar si los vectores $u_1,\ldots u_n$ son **LI / LD**

Paso 1.- Plantear la ecuación $\mathbf{a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0}$ que lleva a un **SH**

Paso 2.- Resolver el **SH**.

- Si **SH** tiene sólo solución trivial **(SCD)** → los vectores son **LI**
- Si **SH** tiene solución no trivial **(SCI)** → los vectores son **LD**

>> Cada columna de la matriz del SH es un vector $\mathbf{u_i}$

Ej9a.T7

Estudia si los vectores de S1 = { (1,1,1) , (1,0,1), (0,1,1) } son LI

Plantea ecuación paramétrica

$$a_1 (1, 1, 1) + a_2 (1, 0, 1) + a_3 (0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Plantea matriz y resuelve

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Solución $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

Los escalares son **todos nulos** >> vectores $v_1, v_2, v_3 \rightarrow$ **LI**

Comprueba si S = { (4, 5, 4), (1,1,1), (1,-2, 0), (3,-2, 1) } es LD o LI

Ej9b.T7

Plantea ecuación paramétrica

$$a_1\,(4, 5, 4) + a_2\,(1, 1, 1) + a_3\,(1,-2, 0) + a_4\,(3,-2, 1) = (0, 0, 0)$$

Plantea matriz y resuelve

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución a_4 parámetro → no tiene 1 principal → SCI infinitas soluciones

Luego S es **LD**

Consigue dos vectores u3, v3 para que los conjuntos U = { u1, u2} y V = {v1, v2} sean LD

Ej11.T7

u1 = (1,5,-2), u2 =(-3,-1,0)	
v1 = (1,1,0), v2 = (0,2,2)	

Consigue dos vectores u3, v3 para que los conjuntos U = { u1, u2} y V = {v1, v2} sean LD

Ej11.T7

u1 = (1,5,-2), u2 =(-3,-1,0)	u3 = (-2, 4, -2)
v1 = (1,1,0), v2 = (0,2,2)	v3 = (1, 3, 2)

Cualquier combinación lineal de los vectores de U y V sirve.

Por ejemplo, sumándolos

1. (1,5,.-2) + (-3,-1,0) = (-2,4,-2)
2. (1,1,0) + (0,2,2) = (1,3,2)

Un **EV** de dimensión n tiene, **como máximo**, n vectores LI.

Ej. Los vectores (2,-3,4), (4,7,-6) , (18, -11, 4) y (2,-6,3) son **LD** ya que forman un conjunto de 4 vectores de 3 componentes (R^3)

Al buscar el vector que es LD se obtiene:

$$A = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 & 2 \\ -3 & 7 & -11 & -6 \\ 4 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-0.4} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-0.5} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0.2} \end{bmatrix}$$

Escribe el vector LD como CL del resto

$$v_4 = (2,-6,3) = (-0.4)\, v_1 + (-0.5)\, v_2 + (0.2)\, v_3$$

La columna que no tiene 1 principal corresponde al vector que es LD del resto

BASES Y DIMENSIÓN

Una **base** de un espacio vectorial **V** de dimensión **n** es un conjunto de **n** vectores con la propiedad de que cada vector del espacio se puede expresar, de manera **única**, como **combinación lineal** de los vectores de la base.

Un espacio vectorial **V** está generado por n vectores L I.

La **dimensión** de **V** es el **número de vectores** en la base.

Ej. La dimensión de R^2 es 2.

$$\dim(R^2) = 2$$

Procedimiento para determinar una **base de V**

Paso 1. $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_nv_n = 0$ (1)

Paso 2. Reducir matriz aumentada asociada al SH (1)

Paso 3. Columnas con unos principales >> base para V

Los 1 principales en la reducida son vectores L I > forman una base para V

Ej10.T7

Demuestra si B = { (1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3) } es una base para R^3

Plantea ecuación paramétrica

Plantea matriz y resuelve

Resultado

Dimensión de B :

Ej10.T7

Demuestra si B = { (1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3) } es una base para R^3

Plantea ecuación paramétrica

$$a_1\,(1,0,0) + a_2\,(1,1,0) + a_3\,(0,2,-3) = (0,0,0)$$

Plantea matriz y resuelve (reducida-GJordan)

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0

Como los **1** principales aparecen en las columnas 1, 2 y 3, todos los vectores de B son LI luego forman una **base para R^3**.

Dimensión de B : 3

Hallar una base y su dim del subesp vectorial $S = \{ (x, y, z)$ de $R^3 / x - 2y + 3z = 0\}$

El SEL sólo tiene 1 ecuación con 3 incógnitas,

3 incógnitas – 1 ecuación = 2 parámetros

Llamamos **$z = a$, $y = b$**

Sustituimos estos valores en la ecuación:

$$x - 2b + 3a = 0 \Rightarrow x = 2b - 3a$$

Si $(x,y,z) \in S \Rightarrow (x,y,z) = (2b - 3a, b, a) =$

$$= (-3a, 0, a) + (2b, b, 0)$$

$$= a(-3,0,1) + b(2,1,0)$$

Todo vector de S es CL de estos 2 vectores => S está **generado** por esos vectores.

Estos vectores son LI, ya que no son proporcionales => forman una **base.**

Como este conjunto de 2 vectores forman una base, **dim S = 2.**

Completa el conjunto de vectores { u1, u2 } para que sea una base de R3

u1 = (1, 2, 3) u2 = (1, 1, 1)	u3 = (1, 0, 0)

El vector (1,0,0) no es combinación lineal de (1,2,3), (1,1,1) ya que si lo fuera (1,0,0)=a(1,2,3)+b(1,1,1)

En este caso 2a+b=0 y 3a+b=0 y restando queda a=0, así que b=0.

Entonces a+b=0≠1.

Por lo tanto (1,0,0), (1,2,3) y (1,1,1) son linealmente independientes y por lo tanto generar a $\mathbf{R}^3$.

Ej13.T7

Determina qué conjunto de vectores son bases para R^2 o para R^3. Puede ser que los vectores no sean base de ninguno de dichos espacios.

(0, 0), (0, 1), (1, 1)	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno
(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno
(-2, 1, 0), (-3, 0, 0), (1, 1, 0)	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno	base para $\mathbb{R}^2$ base para $\mathbb{R}^3$ Ninguno

Ej12.T7

Dado el SEV, $E = \{ (-2a + b, 5b, -3b + a, b),\ a, b \in R \}$ de R^4, escribe dos vectores de E que constituyan una base de E

$$(-2a + b,\ 5b,\ -3b + a,\ b) = a(-2,0,1,0) + b(1,5,-3,1)$$

vectores	u = (-2,0,1,0) v = (1,5,-3,1)

Coordenadas de un vector en una base

Las **coordenadas** de un vector son los **coeficientes** de la combinación lineal cuando se expresa un vector en términos de los vectores de la base

Cada vector tiene unas determinadas coordenadas en una base.

Coordenadas de un vector en una base

Sea $S = \{ v_1, v_2, \dots v_n \}$ una base para V →

cada vector **u** ∈ **V** se puede **escribir de forma única**

como **C L** de los vectores de la base S:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Los escalares a_i (i = 1…n) son las

coordenadas de **u** según la base S.

$$C_S(u) = [u]_S = (a_1, \ a_2, \dots a_n)$$

Ej15.T7

Las coordenadas de un vector u en la base canónica son (3,5).
Calculamos las coordenadas de u en la base B = { v = (1,2) w = (2,1) }

u se escribe como CL de los vectores de v y w

$$(3,5) = a\,(1,2) + b\,(2,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} a & b & \end{array} \end{array}$$

a = 7/3
b = 1/3

Coordenadas de u en la base B: (7/3, 1/3)

Coordenadas de un vector en una base

Las coordenadas de un vector en una base dependen del **orden** de los vectores en la base.

Sean las bases **ordenadas** para V

$$S1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, v_3, v_4\}$$

$$S2 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, v_3, v_4\}$$

entonces

$$\mathbf{S1 \neq S2}$$

coordenadas de **u en S1** $\neq$ **coordenadas de u en S2**

Calculamos las coordenadas del vector v = (2,3,11,4) en las bases S1 = { (1,0,1,-1), (0,1,3,2) } y S2 = { (0,1,3,2), (1,0,1,-1)}

Ej16.T7

v se escribe como CL de los vectores de S1 y S2
Los vectores de S1 y S2 se ponen en columnas siendo la última la del vector v

A1

1	0	2
0	1	3
1	3	11
-1	2	4

rref(A1)

1	0	**2**
0	1	**3**
0	0	0
0	0	0

A2

1	1	2
0	0	3
3	1	11
2	-1	4

rref(A2)

1	0	**3**
0	1	**2**
0	0	0
0	0	0

$c_1 = 2$; $c_2 = 3$;
➔ coordenadas de v en la base S1
$[v]_{S1} = (2, 3)$

$c_1 = 3$; $c_2 = 2$;
➔ coordenadas de v en la base **S2**
$[v]_{S2} = (3, 2)$

OjO: No confundir el vector con sus coordenadas;
vector v=(2,3,11,4), sus coordenadas (2,3) indican cómo se expresa **v** en CL de los vectores de la base S1.

S = { x= (1,-2,0), y = (0,-1,3) z = (1,0,-5) w = (-1,1,0) }. Comprobar que los vectores x, y, z forman base B. Calcular las coordenadas de w respecto de la base B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si B = {x,y,z} es base =>

x, y, z son L I => SEL es SCD =>

coordenadas de **w** respecto de B son a, b, c /

w es CL de x, y, z =>

w = ax +by +cz

(-1,1,0) = a (1,-2,0) + b (0,-1,3) + c (1,0,-5)

Resolver SEL =>

a = 2,

b = -5,

c = -3 => (2,-5,-3) : coordenadas de w en base B

> Los vectores de S están expresados en la base canónica de R^3

> Para probar que los vectores x, y z forman una base es suficiente probar que son LI ya q son 3 vectores de tamaño 3. En reducida se muestra que son LI ya que el SEL es SCD

B = { x = (-1,2), y = (3,1) } base de R^2. Las coordenadas de v en la base B son (2,1) , calcular las coordenadas de v respecto de la base canónica de R^2

$$\boxed{v = 2(-1,2) + 1(3,1) = (-2,4) + (3,1) = (1,5)}$$

Ponemos el vector **v** como CL de los vectores de la base canónica

$(1,5)= a(1,0) + b(0,1)$

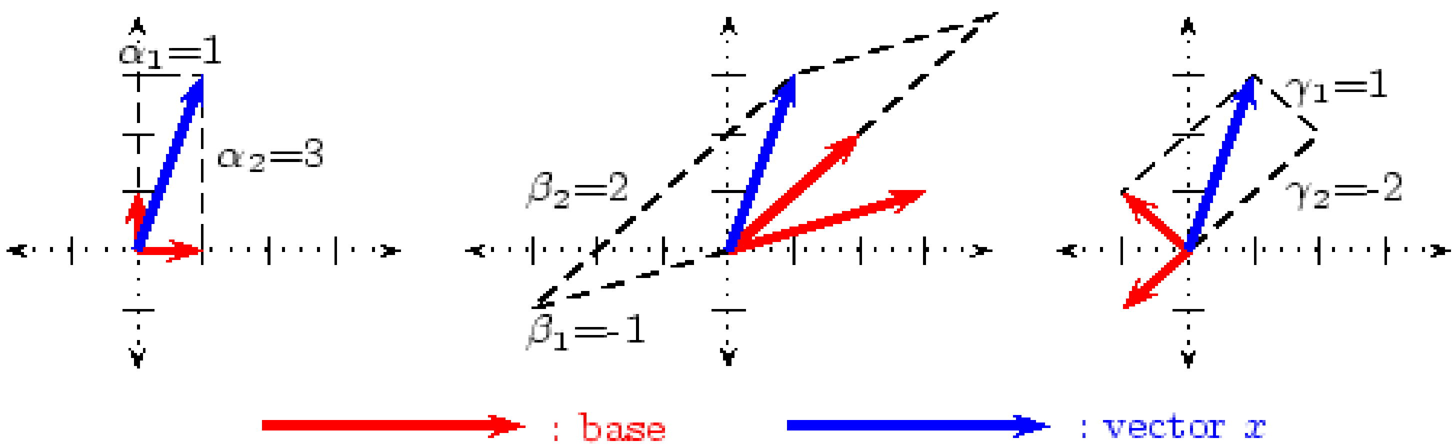
a = 1, b = 5 coordenadas de v en base canónica

Cambio de base

Por lo general, los vectores de R^n se expresan como CL de una base canónica formada por los vectores unitarios.

En R^2 son {**i**=(1, 0); **j**=(0, 1)} y en R^3 **i**=(1, 0, 0); **j**=(0, 1, 0); **k**=(0, 0, 1)}, etc

Algunas veces es conveniente usar otras bases, por ej., cuando se analiza el movimiento de un objeto en un plano inclinado debido a la acción de una o más fuerzas; en estos casos, el uso de un sistema de coordenadas rotado facilita la solución del problema.



Cambio de base de un Vector

Cambio de base

Un **cambio de base** es una aplicación entre dos **EV** que permite relacionar entre sí las coordenadas de un vector expresadas respecto a dos bases distintas

$$\boxed{[v]_S = P_{S \leftarrow T}\,[v]_T}$$

$P_{S \leftarrow T}$ >>

matriz de transición

que cambia las coordenadas de

vectores de la base T a la base S

Procedimiento para calcular la **matriz de transición** $P_{S \leftarrow T}$

Dadas dos bases $T = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n \}$ y $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \}$

Para **calcular** la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S se hace:

Paso 1. Se calculan las **coordenadas** de $\mathbf{w}_j$, ($j = 1,\ldots n$) respecto a la base S.

Para ello se expresa el vector w_j como CL de los vectores de S:

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{c}_{1j}\mathbf{v}_1 + \mathbf{c}_{2j}\mathbf{v}_2 + \ldots\ \mathbf{c}_{nj}\mathbf{v}_n, \quad j = 1,2,\ldots n$$

y se determinan los valores de c_{1j} por Gauss-Jordan

Paso 2. Para cada ecuación $\mathbf{w}_j$ se forma una matriz y se reduce.

Calcula matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ / $T = \{w_1, w_2, w_3\}$, $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases para R^3

Ej17.T7

$v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,2,0)$ $v_3 = (1,1,1)$

$w_1 = (6,3,3)$, $w_2 = (4,-1,3)$ $w_3 = (5,5,2)$

Paso 1 Los vectores w_j de T se expresan como CL de los vectores de S:

$$w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$w_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

$$w_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$$

Paso 2. Para cada ecuación se forman matrices

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_1]$

2	1	1	6
0	2	1	3
1	0	1	3

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_2]$

2	1	1	4
0	2	1	-1
1	0	1	3

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_3]$

2	1	1	5
0	2	1	5
1	0	1	2

Ej17.T7

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_1]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_2]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$[v_1\ v_2\ v_3 \mid w_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$P_{S \leftarrow T} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S

Ej18.T7

Dado **v = (4,-9,5)** calcula sus coordenadas en la base T anterior

$w_1 = (6,3,3)$, $w_2 = (4,-1,3)$ $w_3 = (5,5,2)$ y luego en la base S

$v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,2,0)$ $v_3 = (1,1,1)$

Vector v = (4,-9,5) en base T =>

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$$
$$= 1(6,3,3) + 2(4,-1,3) - 2(5,5,2)$$
$$= 1w_1 + 2w_2 - 2w_3$$

$$[v]_T = (1, 2, -2)$$

Coordenadas de v en la base S :

$$[v]_S = P_{S \leftarrow T}\, [v]_T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_S = (4, -5, 1)$$

Ej19.T7

Sean las bases B1 y B2 de un EV.
C la matriz de cambio de base de B1 a B2.

Sea el vector **u = (a, 1, b)** / a, b $\in$ R

$$C_{B1 \to B2} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula las coordenades de **u** en la base B2

Ej19.T7

Sean las bases B1 y B2 de un EV.
C la matriz de cambio de base de B1 a B2.

Sea el vector **u = (a, 1, b)** / a, b $\in$ R

Calcula las coordenades de **u** en la base B2

$$C_{B1 \to B2} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a - 2 \\ 3 - 3b \\ -2a - 5b \end{pmatrix}$$

SUBESPACIOS que proporciona la matriz **A = [a_{ij}] mxn**

- Si A (nxn) es una matriz **invertible**,
  las **columnas y filas** de A
  forman conjuntos de **vectores L I**.

- Se mostrará cómo se puede obtener una **base** para el espacio generado por un conjunto de vectores de A, mediante la **reducción por filas**.

SUBESPACIO COLUMNA de la matriz $A = [a_{ij}]$ mxn

Col A = Env{ $a_{:1},\dots a_{:n}$ }

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las columnas de $A = [a_{:1} \dots a_{:n}]$, consideradas como n-vectores de **R^m** (m filas) generan un subespacio de R^m llamado **Subespacio Columna de A**

Ej. columna 1 : $a_{:1} = (a_{11}, a_{21}, \dots a_{m1})$

Una **base** de ColA estará formada por las

columnas de A

que en la reducida tienen 1's principales

El **rango** de la matriz A es el nº de columnas LI

Sea A, halla base y dimensión del subespacio Col A /

Ej20.T7

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

En Octave puedes escribir
A = [1,1,2,-1; 1,0,3,1].

A tiene 4 columnas de tamaño 2

vectores columna: (1,1), (1,0), (2,3), (-1,1)

la base de Col A estará formada, como mucho, por **2** vectores LI (R^2)

rref(A) $\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{matrix}$

Base(Col A) : { (1,1), (1,0) }

Dim (Col A) = 2

Los vectores: (2,3), (-1,1) son LD

SUBESPACIO FILA de la matriz A =[a_{ij}] mxn

Fil A = Env{ $a_{1:}$,…$a_{n:}$ }

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las filas de A = [$a_{1:}$ … $a_{m:}$],

consideradas como m-vectores de **R^n** (n columnas)

generan un **subespacio de R^n** llamado

Subespacio Fila A

Ej. fila 1 : $a_{1:}$ = [a_{11} a_{12} … a_{1n}]

Una **base** de **Fil A** estará formada por las

filas de A

que en la **reducida** tienen 1's principales

Halla base y dimensión del subespacio Fil A /

Ej21.T7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como las dos filas de la reducida de A tienen 1's principales:

Fil A = Env { fila 1 de A, fila 2 de A }

Dim Fil A = 2

Ojo: los vectores fila de la reducida no coinciden con los vectores que están en las filas de A

SUBESPACIO NULO de la matriz $A = [a_{ij}]$ mxn

Coincide con el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$

$\text{Nul } A = \{ x \ / \ x \in R^n, \ Ax = 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= x_3 + 2x_4 \\ x_3 & \\ x_4 & \end{aligned}$$

Vector solución :

$$(-2x_3 + 2x_4, \ x_3 + 2x_4, \ x_3, \ x_4) = x_3(-2, 1, 1, 0) + x_4(2, 2, 0, 1)$$

$$\text{Nul } A = \text{Env}\{(-2, 1, 1, 0), \ (2, 2, 0, 1)\}$$

Dimensión $\text{Nul } A = 2$

SUBESPACIO NULO de la matriz $A = [a_{ij}]$ mxn

$$\text{Nul } A = \{ x \ / \ x \in R^n, \ Ax = 0 \}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas:

$x_1 = x_4$
x_2
$x_3 = -3x_4$
$x_4 = 0$

Vector solución : $(x_4, \ x_3, \ -3x_4, 0) =$

$x_3 (0, 1, -3, 0) + x_4 (1, 0, -3, 0)$

$$\text{Nul } A = \text{Env} \{ (0, 1, -3, 0), \ (1, 0, -3, 0) \}$$

Dimensión Nul A = 2

Determinar si u = (5, 3, -2) pertenece al espacio Nul A

Ej22.T7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que probar si **u** satisface Au = 0

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector u sí está en Nul A.