Resumen TEMA 7- VECTORES Y ESPACIOS VECTORIALES

Algunos sistemas de ecuaciones lineales tienen infinitas soluciones que pueden conformar un conjunto de vectores llamado espacio vectorial. Este concepto muy utilizado en los dispositivos digitales como móviles, computadoras y servicios de telecomunicaciones emplean algoritmos que detectan y corrigen errores en la transmisión de datos.

R^n : espacio vectorial. Vectores: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots u_n)$

Espacio vectorial (EV)

Un espacio vectorial (espacio lineal) es una estructura matemática formada por un conjunto de vectores que cumplen 10 axiomas relacionados con la suma y el producto por escalar y que aplicados a los vectores del conjunto obtienen otro vector.

Suma (op. Interna) x, y $\in$EV : u + v $\in$ EV, Conmutativa, Asociativa, Distributiva, E. Neutro, E. Opuesto.

Producto escalar x$\in$EV, $\alpha \in$R: $\alpha v \in$ EV, Asociativa, Distributiva, E. Unidad

SubEspacio Vectorial (SEV)

Un SEV es un subconjunto de un EV con el que podemos obtener elementos, vectores, del EV.

Para que un conjunto de vectores S sea un subespacio vectorial de un EV, V, debe:

- Ser no vacío.
- Contener el **vector 0**
- Sus elementos se pueden **sumar y multiplicar por un escalar**

Ej1-T7 2 y 4

Combinación lineal de vectores de dimensión n

Un vector v $\in$ R^n es combinación lineal (CL) de los vectores $u_1, u_2, \ldots u_p$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$

/ $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots \alpha_p u_p$

Procedimiento para demostrar que un vector v $\in$ V pertenece a S $\subseteq$ V (es CL de los elementos de S)

Sea v $\in$ V. Para comprobar si v es CL de p vectores, $u_1, \ldots u_p$ /$u_i \in R^n$ se construye un SEL a partir de la ecuación paramétrica : $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p$

Si el sistema es SCD → v es **CL** de los vectores u_i de forma ÚNICA

Si el sistema es SCI → v es **CL** de los vectores u_i de infinitas formas

Si el sistema es INCOMPATIBLE → v **NO** es CL de los vectores u_i

Ej2a-T7, Ej2b-T7, Ej3-T7

Conjunto generador / Envoltura lineal de un SEV

Sea S = { $u_1, \ldots, u_p$} $\in$ R^n. S es un conjunto generador de R^n si haciendo CL de sus vectores se generan todos los demás vectores del EV.

Env (S) = Env { $\mathbf{u_1, \ldots, u_p}$ }. Conjunto de todas las CL de los vectores $\mathbf{u_1, \ldots, u_p}$

Procedimiento para determinar si un conjunto de vectores genera un EV

Sea V un espacio vectorial.
Paso1: Se selecciona un vector arbitrario v $\in$ V
Paso2: Se determina si v es CL de los vectores de Env{$u_1, \ldots u_k$ }
Si v es CL >> $u_1, \ldots, u_k$ generan a V.
Si v no es CL >> $u_1, \ldots, u_k$ no generan a V.

Ej4-T7, Ej5-T7, Ej6-T7, Ej7-T7, Ej8-T7

Base de un EV

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots v_p$ de un espacio vectorial V forman base para V si

>> $v_1, v_2, \ldots v_p$ son linealmente independientes

>> $v_1, v_2, \ldots v_p$ generan V

Vectores linealmente independientes (LI)

$u_1 \ldots u_p \in V$ son LI si existen escalares $a_1, \ldots a_p \in R$, todos nulos / $a_1u_1 + \ldots + a_pu_p = 0$ (vector nulo)

Vectores linealmente dependientes (LD)

$u_1 \ldots u_p \in V$ son LD si existen escalares $a_1, \ldots a_p \in R$, NO todos nulos/ $a_1u_1 + \ldots + a_pu_p = 0$.

Procedimientos para determinar si un grupo de vectores es LI o LD.

1. *n* vectores de dimensión *n* se ponen como columnas de una matriz cuadrada; si el determinante de esa matriz es diferente de cero, entonces los vectores son LI o de lo contrario son LD.

2. Paso 1.- Plantear la ecuación $\mathbf{a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0}$ que lleva a un SH

Paso 2.- Resolver el SH.

- Si SH tiene sólo solución trivial **(SCD)** → los vectores son **LI**
- Si SH tiene solución no trivial **(SCI)** → los vectores son **LD**

Ej9a-T7, Ej9b-T7

Procedimiento para determinar una base de un EV formada por vectores de S.

Paso 1. $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_nv_n = 0$ (1)

Paso 2. Reducir matriz aumentada asociada al SH (1)

Paso 3. Columnas con 1´s principales (son LI) >> base para V.

El nº de vectores de una base para V es el tamaño de V.

Ej10-T7

Dimensión de un espacio vectorial

La dimensión de un EV es el número de vectores en la base. Todas las bases de un EV tienen la misma dimensión. Cualquier conjunto de *n* vectores LI en un EV de dimensión *n* constituye una base.

Coordenadas de un vector en una base

Las **coordenadas** de un vector son los coeficientes de la CL cuando se expresa el vector se expresa como CL de los vectores de la base.

Si $S = \{ v_1, v_2, \ldots v_n \}$ es una base para V, cada vector $u \in V$ se puede escribir de forma única

como CL de los vectores de S: $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_nv_n$ $a_i \in R$. Los escalares $\mathbf{a_i}$ (i=1…n) son las **coordenadas** de **u** según la base S.

$\mathbf{C_S(u) = [u]_S = (a_1, a_2, \ldots a_n)}$

Ej15-T7, Ej16-T7

Base canónica

La base canónica (base estándar) de R^n: $e_1 = (1,0,\ldots,0)$ $e_2 = (0,1,.\ .\ 0)$....... $e_n = (0,0,.\ .\ .1)$
- Son vectores LI (determinante no nulo).
- Son sistema generador de R^n porque todo vector $(a_1,a_2,.\ .\ .\ ,a_n) \in R^n$ se puede expresar como CL de ellos:
$(a_1,a_2,.\ .\ .\ ,a_n)= b_1(1,0,.\ .\ .\ ,0) + b_2(0,1,.\ .\ .\ ,0) + .\ .\ . + b_n(0,0,.\ .\ .\ ,1)$.

Cambio de Base

Aplicación entre dos **EV** que permite relacionar las coordenadas de un EV expresadas respecto a dos bases distintas
$[\mathbf{v}]_S = \mathbf{P}_{s\leftarrow T}\ [\mathbf{v}]_T$
$\mathbf{P}_{s\leftarrow T}$ >> matriz de transición de la base T a la base S

Procedimiento para calcular la **matriz de transición** $\mathbf{P}_{s\leftarrow T}$

Dadas dos bases $T = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n \}$ y $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \}$
Para calcular la matriz de transición $\mathbf{P}_{s\leftarrow T}$ de la base T a la base S se hace:
Paso 1. Se calculan las **coordenadas** de $\mathbf{w}_j$, $(j = 1,\ldots n)$ con respecto a la base S, para ello
1° se expresa el vector w_j como CL de los vectores de S: $\mathbf{w}_j = \mathbf{c}_{1j}\mathbf{v}_1 + \mathbf{c}_{2j}\mathbf{v}_2 + \ldots \mathbf{c}_{nj}\mathbf{v}_n$, $j = 1,\ldots n$
2° se determinan los valores de c_{1j} por Gauss-Jordan
Paso 2. Para cada ecuación $\mathbf{w}_j$ se forma una matriz y se reduce.

Ej17-T7, Ej18-T7, Ej19-T7

SUBESPACIOS que proporciona la matriz $\mathbf{A} = [\ \mathbf{a}_{ij}\ ]$ mxn

Col A. Las columnas de $A = [a_{:1} \ldots a_{:n}]$, consideradas como n-vectores de $\mathbf{R}^m$ (m filas) generan un subespacio de R^m llamado **Subespacio Columna de A.** **Col A = Env{** $\mathbf{a}_{:1},\ldots\mathbf{a}_{:n}$ **}.** Una base de ColA estará formada por las columnas de A que en la reducida tienen 1's principales

Fil A. Las filas de $A = [a_{1:} \ldots a_{m:}]$, consideradas como m-vectores de $\mathbf{R}^n$ (n columnas) generan un **subespacio de** $\mathbf{R}^n$ llamado **Subespacio Fila A. Fil A = Env{** $\mathbf{a}_{1:},\ldots\mathbf{a}_{n:}$ **}.** Una base de Fil A está formada por las <u>filas de A</u> que en la reducida tienen 1's principales.

Nul A. Nul A = $\{ \mathbf{x}\ /\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \}$