TEMA 8 Valores y vectores propios (autovalores / autovectores).

Conceptos y ejemplo introductorio.

Procedimiento para calcular los autovalores y autovectores reales asociados a una matriz.

Subespacio propio asociado a los autovalores.

Diagonalización de matrices.

*Para trabajar con **grandes** matrices ...*
mejor si están escritas lo más "sencillas" posible

Objetivo : Escribir la matriz de coeficientes A como una matriz diagonal

Son fáciles de manejar / almacenamiento más económico

Dada una matriz **A (nxn)**

¿ Existe una matriz **semejante** a **A** que sea **diagonal** ?

MATRICES SEMEJANTES

❖ Dos matrices **A** y **B** cuadradas **nxn** son **semejantes (A ~ B)** cuando existe una matriz cuadrada **P** de orden **n /**

$$A = PBP^{-1}$$ (P matriz de paso)

❖ Si **A** (nxn) es **semejante** a una matriz **diagonal**

➔

A es **diagonalizable**

MATRICES DIAGONALIZABLES

Una matriz **A nxn** es

diagonalizable

si existe una matriz **P** (nxn) invertible y una

matriz D **diagonal** /

$$A = PDP^{-1}$$

$$\leftrightarrow$$

$$AP = PD$$

CONDICIONES para que una matriz A sea diagonalizable

$$A = PDP^{-1}$$

Sea **A (nxn)**:

a) A es **diagonalizable sii** tiene **n autovectores LI.**

b) **Si** A tiene todos sus **autovalores distintos** entonces **A es diagonalizable.**

c) A es **diagonalizable sii** para cada λ se verifica que **ma(λ) = mg(λ)**

d) A es **diagonalizable sii** $\mathbf{R^n}$ admite una **base** formada por autovectores de A

PASOS para DIAGONALIZAR una MATRIZ

Sea **A (nxn)**:

- Los elementos de la **diagonal de D** son los **autovalores de A**.

  1° Calcular los autovalores de A.

- Cada **columna de P** es un **autovector** asociado a su correspondiente autovalor

  2° Calcular los autovectores asociados a los autovalores

Se comprueba $A \sim D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

Cuidado: Primero se construye la matriz P y luego la matriz diagonal D teniendo en cuenta **el orden** en el que se han colocado los autovectores en las columnas de P

EJ. 1

Diagonalizar, si es posible, la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1º Calcular autovalores

$$q_A(\lambda) = |A - \lambda \mathbf{I}| = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2 \text{ (doble)}$$

2º Calcular autovectores : 3 vectores que deben ser LI para formar base

Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ $\quad \mathbf{E_A(\lambda_1)} = \text{Env}\{\, \mathbf{v_1} = (1, -1, 1) \,\}$

Para $\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$ $\quad \mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\, \mathbf{v_2} = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{v_3} = (-1, 0, 1) \,\}$

v_1, v_2, v_3 son LI

<u>Comprobar</u>: (1, -1, 1) es solución de [A – 1I] x = 0
(-1, 1, 0) y (-1, 0, 1) son solución de [A + 2I] x = 0

EJ. 1 cont

Se construye P: autovectores en columnas de P (cualquier orden)

$\mathbf{v_1} = (1, -1, 1)$

$\mathbf{v_2} = (-1, 1, 0)$

$\mathbf{v_3} = (-1, 0, 1)$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que P es invertible

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se construye D: colocar autovalores en el mismo orden que los autovectores en P

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A = PDP^{-1}

verificar **AP = PD**

EJ. 2

Estudia si A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como A es triangular superior los autovalores de A son los elementos de la diagonal

$\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$ $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$ $\boldsymbol{\lambda_3 = -2}$

Como A es 3x3 y tiene **3** valores propios distintos =>

A es diagonalizable (por b)

EJ. 3 Estudia si A es diagonalizable a partir de la multiplicidad de los autovalores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalores $\lambda_1 = 1$ (doble), $ma(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 5$ $ma(\lambda_2) = 1$

$E_A(\lambda_1)$ = Env{ (-2, 1, 0) (-1, 0, 1) } $mg(\lambda_1) = 2$

$E_A(\lambda_2)$ = Env{ (1, 1, 1) } $ma(\lambda_2) = 1$

λ_i	$ma(\lambda)$	$mg(\lambda)$
0	1	2
2	2	1

A es **diagonalizab**le ya que se cumple el postulado **c)**

"c) A es diagonalizable sii para cada λ es $ma(\lambda) = mg(\lambda)$"

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba **$A \sim D \iff AP = PD \iff A = PDP^{-1}$**