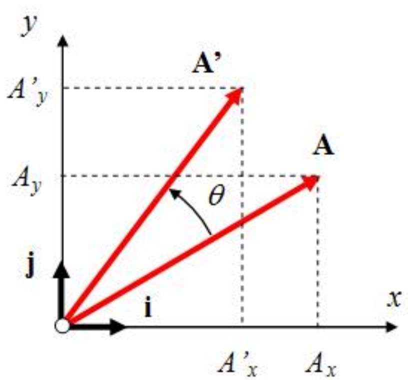
TEMA 8 Valores y vectores propios (autovalores / autovectores).

Conceptos y ejemplo introductorio.

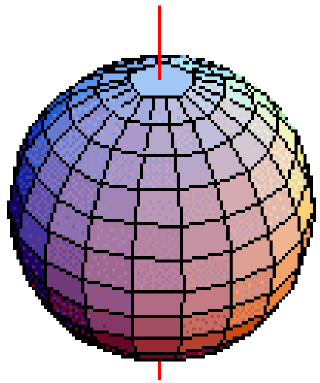
Procedimiento para calcular los autovalores y autovectores reales asociados a una matriz.

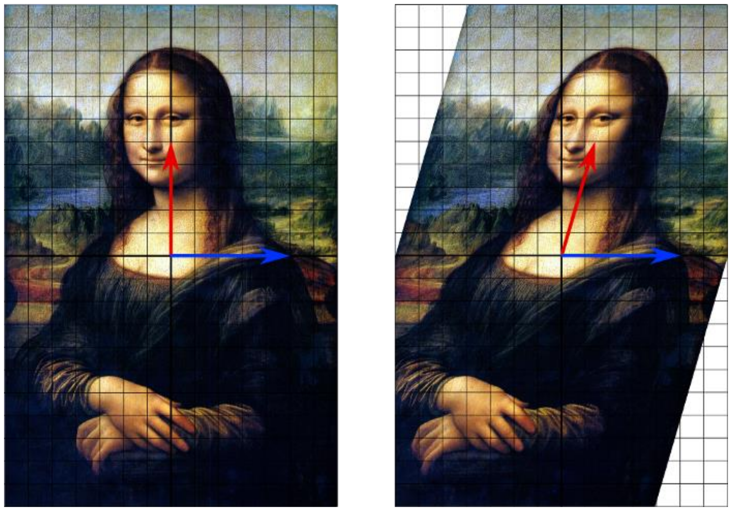
Subespacio propio asociado a los autovalores.

Diagonalización de matrices.



Cambio de base con rotación de un vector en el plano / en el espacio





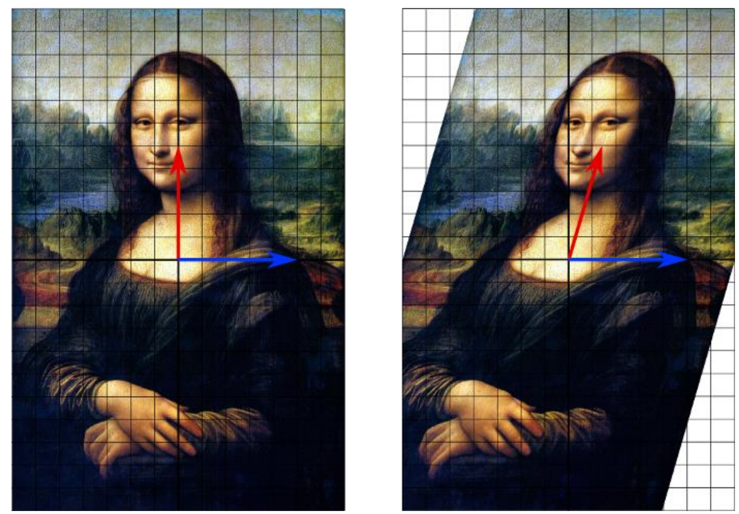
Al "recortar" la imagen el **vector rojo** cambia su orientación pero el azul no…

Vectores “invariantes”

Al aplicar una transformación a la imagen de la izquierda el vector azul no ha cambiado su orientación y aunque se repitiera la transformación, recortando más la imagen, este vector permanecería igual.

A los vectores que apuntan **en la misma dirección** antes y después de una transformación se les llama **AUTOVECTORES**

Es muy importante conocer en qué situaciones los datos **permanecen establen** cuando se repiten transformaciones lineales.



Ejemplo introductorio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

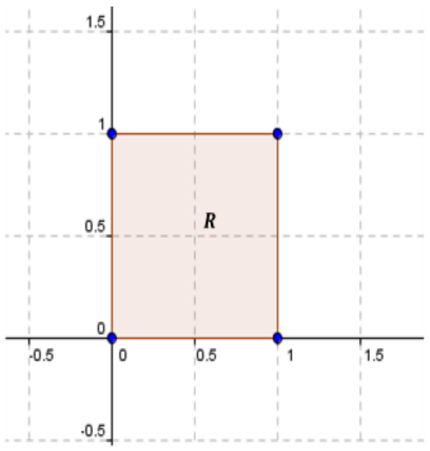
¿ qué le pasará a un vector **x** de $\mathbf{R}^2$ al multiplicarlo por la matriz **A** ?

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

“ sufrirá” una transformación…

Ejemplo introductorio

A		
	3	2
	1	4



Veamos cómo se pueden transformar los vectores en el plano.

Suponemos un recinto **R** formado por un cuadrado de lado **1** con vértice en el origen y situado en el primer cuadrante.

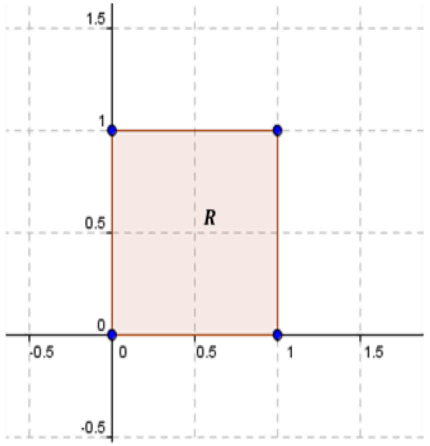
Vectores que definen R:

(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)

Ejemplo introductorio

A

3	2
1	4



¿En qué se transformará **R** bajo el "**efecto" de la matriz A**?

Veamos en qué se modifica cada **vértice** de R.

El vector nulo se transforma en el vector nulo.

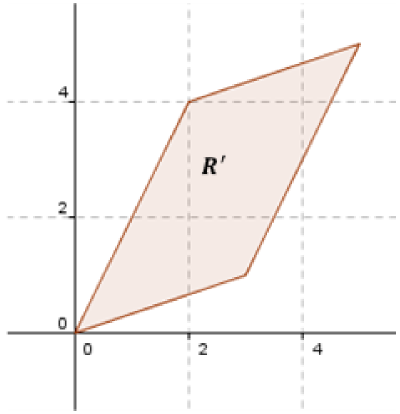
A(0,0)=(0,0)

El resto de vectores serán:

A(1,0)=(3,1) >> **no** conserva la dirección

A(0,1)=(2,4) >> **no** conserva dirección

A(1,1)=(5,5) >> **SI** conserva la dirección >> se produjo una dilatación de factor 5

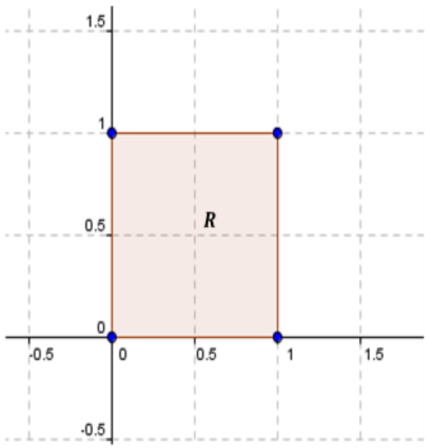


El recinto R se ha transformado en R' a partir de A.

Ejemplo introductorio

A

3	2
1	4

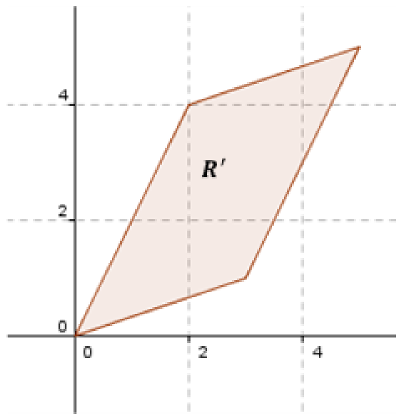


A(0,0)=(0,0)

A(1,0)=(3,1) >> **no** conserva la dirección

A(0,1)=(2,4) >> **no** conserva dirección

A(1,1)=(5,5) >> conserva la dirección >> dilatación de factor 5



Como el vector **(1,1)** conserva la dirección es un **autovector.**

El **factor 5** por el cual se dilató es un **autovalor**

A(1,1)= (5,5) = 5 (1,1)

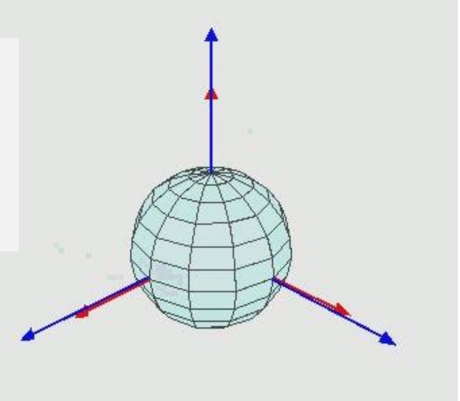
$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda x$$

En álgebra lineal los **vectores propios** o **autovectores** de una aplicación lineal[1] son los vectores <u>no nulos</u> que cuando son transformados por el operador dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección.

El factor de escala recibe el nombre de **valor propio o autovalor**.

Un conjunto de autovectores, con un autovalor común, conforman un **espacio propio o autoespacio**.

El autovector de una rotación en tres dimensiones es un vector situado en el eje de rotación sobre el cual se realiza la rotación.
El espacio propio es el eje de giro.



Los ángulos de Euler como rotaciones en el espacio tridimensional[2]

1 Aplicación entre dos espacios vectoriales que preserva las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar.

2 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c5/Euler2.gif

AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz (nxn) de R

Def. Un vector **x** $\in$ **R^n** es **un autovector** de **A** si, y sólo si,

es un vector **no nulo** que satisfice la ecuación

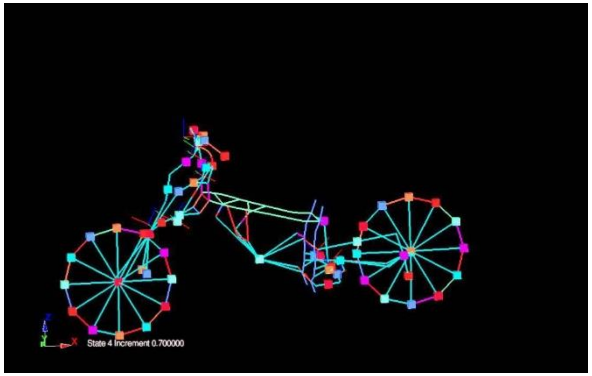
$$Ax = \lambda x \qquad / \quad \lambda \in R$$

- Cada **autovector** **x** está asociado a un **único autovalor** **λ**
- Cada **autovalor** **λ** tiene asignados **infinitos autovectores**

> Para determinar los autovectores de A se calculan, primero, sus autovalores

Autovalores λ y autovectores x => $Ax = \lambda x$

Herramienta muy útil… robótica, arquitectura…

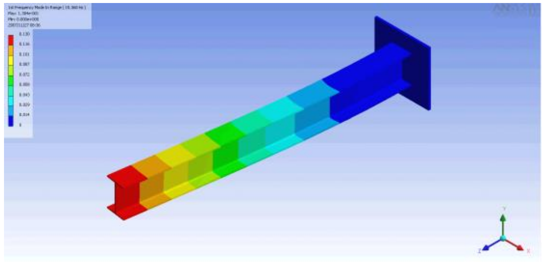


Sólido dividido en trozos … cuánta masa tiene cada uno y cómo de «fuertemente unido» está a sus «trozos» vecinos

2º ley de Newton partes del sólido x => $-Kx=Mx$

Con esto se precisa **cómo vibrará,** y a qué frecuencias, cualquier objeto sólido. Si ω son frecuencias:

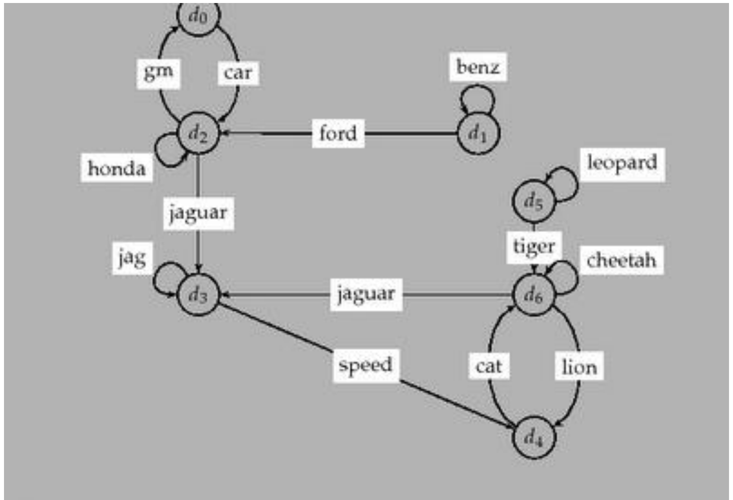
$$M^{-1}Kx=\omega^2 x$$



Los autovectores **x** indican para cada vibración de qué forma exacta se va a **mover** el cuerpo.

Autovalores λ y autovectores x => $Ax = \lambda x$

Herramienta muy útil… Google



► **Figure 21.1** A small web graph. Arcs are annotated with the word that occurs in the anchor text of the corresponding link.

El método *Page Rank* de Google está basado en la teoría de autovectores para decidir qué páginas son realmente más relevantes a la hora de resolver búsquedas.

CÁLCULO de AUTOVALORES

Se plantea $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (1)

$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$

$[A - \lambda I]\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (2)

Si $[A - \lambda I]$ es invertible → el SEL **(2)** es **SCD** sólo solución trivial

Si $[A - \lambda I]$ **no** es invertible **$| A - \lambda I | = 0$** → **el SEL (2)** es **SCI,** infinitas soluciones

¿ cuántas **soluciones** nos "interesan" ?

Como debemos obtener **autovectores NO NULOS,** necesitamos encontrar **infinitas soluciones**

CÁLCULO de AUTOVALORES

Se plantea

$$| A - \lambda I | = 0 \qquad (3)$$

❖ De (3) se obtiene un polinomio de grado igual al orden de A, llamado:

❖ **Polinomio / ecuación característica**

$$q_A(\lambda) = | A - \lambda I |$$

❖ Las **raíces** de (3) son los autovalores **λ** (reales o complejos), de **A**

❖ Si $q_A(\lambda)$ es de **grado n** ➔ hay **n** autovalores (raíces de $q_A(\lambda)$)

En complejos las matrices (nxn) tienen n autovalores, en R no siempre

CÁLCULO de AUTOVALORES

Ej-1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$| A - \lambda I | = 0$$

$$| A - \lambda I | = \left| \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Polinomio característico

$$q_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Autovalores de A

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 5$

MULTIPLICIDAD de los AUTOVALORES

- La **multiplicidad de cada raíz** del polinomio es la **multiplicidad algebraica** de cada autovalor λ_i

$$\mathbf{ma}\,(\lambda_i)$$

$$q_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 5$$

$$ma(2) = 1$$

$$ma(5) = 1$$

- La **suma** de las multiplicidades algebraicas de todos los autovalores coincide con el **grado** del polinomio

$$ma(2) + ma(5) = 1 + 1 = 2$$

CÁLCULO de AUTOVECTORES

- Obtenidos los autovalores se **obtienen los autovectores asociados** a ellos.

PROCEDIMIENTO:

- Cada autovalor λ_i se reemplaza en **$[A - \lambda_i I]\,x = 0$**
- Se resuelve el sistema homogéneo.

Ej-1 cont

$\lambda_1 = 2$

$$[A - 2I]x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = (0,0)$$

$\lambda_2 = 5$

$$[A - 5I]x = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = (0,0)$$

CÁLCULO de AUTOVECTORES

Ej-1 cont

$$\lambda_1 = 2$$

$$[\,A - 2I\,]\,x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = (0,0)$$

La solución del sistema viene dada por vectores de la forma:

$$x = (\,x_1, x_2\,) = (\,-2x_2, x_2\,)$$

$$\text{rref}[\,A - 2I\,] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO de AUTOVECTORES

Ej-1 cont

$\lambda_2 = 5$

$$[\,A - 5\mathbf{I}\,]\,x = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x = (0,0)$$

La solución del sistema viene dada por vectores de la forma:

$$x = (\,x_1, x_2\,) = (\,x_2, x_2\,)$$

$$\text{rref}[\,A - 5\mathbf{I}\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SUBESPACIO PROPIO

El conjunto de todos los **autovectores asociados**

a un **mismo autovalor** λ

conforma un **subespacio** / **espacio propio**

$$E_A(\lambda) = \text{Nul}\,(A - \lambda I)$$

Una **base** del subespacio $E_A(\lambda)$ estará formada por los **autovectores** asociados a λ

La dimensión del subespacio coincide con la **multiplicidad geométrica del autovalor**

$$mg(\lambda)$$

SUBESPACIO PROPIO

Ej-1 cont

rref[A – 2I] =

1	2
0	0

$\lambda_1 = 2$,

solución $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$= (-2x_2, x_2)$

$= x_2\,(-2, 1)$

un autovector es, por ej, $v_1 = (-2, 1)$

Subespacio propio

$E_A(2) = \text{Env}\{(-2, 1)\}$

$\dim(E_A(2)) = mg(2) = 1$

SUBESPACIO PROPIO

Ej-1 cont

rref[A – 5I] =

1	-1
0	0

$\lambda_2 = 5$

solución $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x_2, x_2)$

un autovector es, por ej, $\mathbf{v}_1 = (1,1)$

Subespacio propio

$E_A(5) = \text{Env}\{(1,\ 1)\}$

$\dim(E_A(5)) = mg(5) = 1$

Resultado esperado porque vimos que el vector (1,1) se transformaba en el (5,5)

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-2

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1° PLANTEA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA:

$$q_B(\lambda) = |B - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$q_B(\lambda) = (4-\lambda)(-4-\lambda)-9 = 0$$

2. Indica cuántos autovalores reales puede tener B:

Como el grado de $q_B(\lambda)$ es **2**, la matriz B tiene, como mucho, 2 autovalores reales

Autovalores de B

$\lambda_1 = -5$

$\lambda_2 = 5$

Ej-2
cont

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema para cada autovalor

$$\boxed{\lambda_1 = -5}$$

$$[\,B + 5I\,]\,x = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x = (0,0)$$

Resuelve

Solución **x =**

Subespacio propio E_B (-5) =

Autovector asociado a $\lambda_1 = -5$, v_1 =

Multiplicidad geométrica: **mg (-5) =**

$$\text{rref}[\,B + 5I\,] = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej-2
cont

$B =$

4	3
3	-4

Se resuelve el sistema para cada autovalor

$\boxed{\lambda_1 = -5}$

$[\,B + 5I\,]\,x =$

9	3
3	1

$x = (0,0)$

Resuelve

Solución $x = (-1/3x_2, x_2)$.

Subespacio propio E_B **(-5)** $= \text{Env}\{ (-1/3x_2, x_2), x_2 \in R \}$

Autovector asociado a $\lambda_1 = -5 \Rightarrow v_1 = (-1/3, 1)$

Multiplicidad geométrica: **mg (-5) = 1**

$\text{rref}[\,B + 5I\,] =$

1	1/3
0	0

Ej-2 cont

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema para cada autovalor

$$\boxed{\lambda_2 = 5}$$

$$[\, B - 5I \,]\, x = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} x = (0,0)$$

Resuelve

Solución x =

Subespacio propio E_B (5) =

Autovector asociado a $\lambda_2 = 5$, v_2 =

Multiplicidad geométrica: **mg (5) =**

$$\text{rref}[\, B - 5I \,] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej-2
cont

$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Se resuelve el sistema para cada autovalor

$$\boxed{\lambda_2 = 5}$$

$$[B - 5I]\,x = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} x = (0,0)$$

Resuelve

Solución $x = (3x_2, x_2)$.

Subespacio propio $E_B(5) = \text{Env}\{(3x_2, x_2),\ x_2 \in R\}$

Autovector asociado a $\lambda_2 = 5 \Rightarrow v_2 = (3, 1)$

Multiplicidad geométrica: **mg (5) = 1**

$$\text{rref}[B - 5I] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = \text{traza}(A)$ (traza: suma elementos diagonal)

2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots . \lambda_n = \det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A

1. traza(A) =

Comprueba 1.

2. det(A) =

Comprueba 2.

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n = \mathrm{traza}(A)$ (traza: suma elementos diagonal)

2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots . \lambda_n = \det(A)$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Autovalores de A

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 5$

1. traza(A) = 3 + 4 = 7

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 5 = 7$

2. det(A) = 10

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2.5 = 10$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores de A y su multiplicidad algebraica. Para calcular los autovectores se busca el subespacio propio generado por cada autovalor y su multiplicidad geométrica

Autovalores

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores de A y su multiplicidad algebraica. Para calcular los autovectores se busca el subespacio propio generado por cada autovalor y su multiplicidad geométrica

Autovalores

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0, & m_a(0) = 1 \\ \lambda_2 = 2 \text{ (doble)}, & m_a(2) = 2 \end{array}}$$

$$q_A(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) -2 +4 +4(1-\lambda) -2(3-\lambda) + \lambda = 0$$
$$q_A(\lambda) = -\lambda^3 +4\lambda^2 -4\lambda = 0$$
$$q_A(\lambda) = \lambda(-\lambda^2 +4\lambda -4) = 0$$

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_1 = 0$

$$[\,A - 0I\,]\,x = 0$$

$$[A-\lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rref}[A-\lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

parámetro

Vector solución x =

$\mathbf{E_A(\lambda_1)}$ =

Multiplicidad geométrica: **mg** (λ_1) **=**

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_1 = 0$

$$[\, A - 0I \,]\, x = 0$$

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

parámetro $x_3 = \alpha$

Vector solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ / $x_1 = \alpha$, $x_2 = -2\alpha$, $x_3 = \alpha$

$$x = (\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1, -2, 1)$$

$\mathbf{E_A(\lambda_1)}$ = Env $\{\alpha\,(1, -2, 1)\ \alpha \in R\,\}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg\,(\lambda_1) = 1}$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_1 = 0$

$$[\, A - 0I \,]\, x = 0$$

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_A(\lambda_1) = \text{Env}\,\{\alpha\,(1, -2, 1)\ \alpha \in R\,\}$$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 0$ es, por ej,

$$v_1 =$$

Comprobad: (1, -2, 1) es solución de [A – 0I] x = 0

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_1 = 0$

$$[\, A - 0I \,]\, x = 0$$

$$[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{reff}[A - \lambda_1 I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_A(\lambda_1) = \text{Env}\, \{\alpha\, (1, -2, 1)\;\; \alpha \in R\, \}$$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 0$ es, por ej,

$$v_1 = (1, -2, 1) \qquad \alpha = 1$$

<u>Comprobad</u>: (1, -2, 1) es solución de [A – 0I] x = 0

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$

$$[\,A - 2I\,]\,x = 0$$

$$[A - 2I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}[A - 2I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

parámetro

Vector solución x =

$E_A(\lambda_2)$ =

Multiplicidad geométrica: **mg (λ_2) =**

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$

$$[\, A - 2I \,]\, x = 0$$

$$[A - 2I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}[A - 2I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

parámetro

Vector solución $x = \alpha\, \mathbf{(0, 1, 1)}$

$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\, (0, 1, 1)\ \alpha \in R\, \}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg}\ (\lambda_2) = \mathbf{1}$

Ej-3 cont

Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$

$$[A - 2I]\, x = 0$$

$$[A-2I] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}[A-2I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_A(\lambda_2) = \text{Env}\, \{\alpha\,(0, 1, 1)\ \alpha \in R \}$$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es, por ej,

$$v_2 = (0, 2, 2) \qquad \alpha = 2$$

Recordar comprobar: (0, 2, 2) es solución de $[A - 2I]\, x = 0$

36

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-3 cont

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores	Multiplicidad algebraica ma(λ)	Multiplicidad geométrica mg(λ)
0	1	1
2	2	1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[VP-01] Dada la matriz A

a) Comprueba si el vector **u = (1,1,1)** es un vector propio de A

b) Comprueba cuál de los valores **λ = 1**, **λ = -1**, es un autovalor de A. Para el que lo sea, calcula el subespacio propio que genera y escribe un vector de dicho espacio.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[VP-01] Dada la matriz A

a) Comprueba si el vector **u = (1,1,1)** es un vector propio (autovalor) de A

Hay que probar **$Au = \lambda u$** (Ecuación matricial)

$$Au = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 5$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

[VP-01]

b) Comprueba cuál de los valores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, es un autovalor de A.
Para el que lo sea, calcula el **subespacio propio** que genera y **escribe un vector** de dicho espacio.

Para demostrar que $\lambda_{i\ (i=1,2)}$ es autovalor de A debe cumplirse que **$\det(A - \lambda_i I) = 0$**

$\lambda_1 = 1 \quad |A-1I| = \det \begin{pmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1$ es autovalor

$\lambda_2 = -1 \quad |A+1I| = \det \begin{pmatrix} 6 & -7 & 7 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 12 \Rightarrow \lambda_2$ no es autovalor

A =

5	-7	7
4	-3	4
4	-1	2

[VP-01]

b) Comprueba cuál de los valores $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, es un autovalor de A. Para el que lo sea, calcula el **subespacio propio** que genera y **escribe un vector** de dicho espacio.

El espacio propio para $\lambda_1 = 1$ estará formado por las **soluciones** del SEL homogéneo => **[A - 1I]x = 0**

|A-1I| =

4	-7	7
4	-4	4
4	-1	1

rref|A-1I| =

1	0	0
0	1	-1
0	0	0

parámetro x_3

Vector solución $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, x_3) = x_3(0, 1, 1)$

$$E_A(\lambda) = \text{Env}\{ x_3(0, 1, 1) \;/\; x_3 \in R \}$$

Autovector v: para $x_3 = 1$, $v = (0, 1, 1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

[VP-02] Considera la matriz B

a) Prueba que el vector **v = (1, -1, 0)** es un autovector de B asociado al autovalor **λ = 2**.

b) Calcula el valor de **a** para el que el autovalor 2 sea el único autovalor de B.

c) Para el valor de **a** calculado en b) calcula la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$

Para comprobar que **v** es autovector de B asociado al autovalor $\lambda = 2$

comprobamos: Bv = 2v

$$\mathbf{Bv} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego v es autovector de B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

[VP-02]

b) Calcula el valor de **a** para el que el autovalor 2 sea el único autovalor de B.

Si 2 es el único autovalor, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Por las propiedades de los autovalores en relación con la traza de la matriz tenemos:

$\text{traza}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 1 + a = 6$

$\Rightarrow$ $a = 4$

$B =$

1	-1	-1
-1	1	-1
2	2	a

[VP-02]

c) Para el valor de **a** calculado en b) calcula la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$

Para calcular la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ obtenemos el espacio propio asociado y determinamos su dimensión.

a = 4, como el único autovalor de B es 2, entonces

|B-2I| =

-1	-1	-1
-1	-1	-1
2	2	2

rref|B-2I| =

1	1	1
0	0	0
0	0	0

Parámetros, x_2, x_3

Vector solución $x = \mathbf{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1- x_3, 1, x_3) + x_3(x_2-1, x_2, 1)}$

$\mathbf{E_A(\lambda)}$ = Env{ (0,1,1), (0,1,1) } **=>** mg(B - λI) = 2

Con rangos: mg(B - λI) = 3 – rang(B - λI) = 3 -1 = 2