

Álgebra

**Ejercicio 1.** (2 ptos.) Matrices y Operaciones.

a) Marcar como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones.

Sean A, B matrices cuadradas nxn, I la matriz identidad de orden n.

a.1) Cualquier matriz cuadrada tiene inversa.  V  F

a.2) Para que una matriz no tenga inversa es suficiente que su forma reducida tenga una fila de ceros.  V  F

a.3) La matriz inversa de una matriz C (nxn) es  $C^{-1}$  si se cumple  $CI = C^{-1}$ .  V  F

a.4) La matriz  $C^{-1}$  es inversa de la matriz C (nxn) si, y sólo si,  $CC^{-1} = I$ .  V  F

b) Justifica tus respuestas con las matrices A y B siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Marcar cada proposición como verdadera o falsa sobre la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.1) Está en forma escalonada por fila.  V  F

c.2) Está en forma reducida.  V  F

c.3) No está en forma escalonada porque la fila 1 tiene un elemento distinto de 1 el  $c_{14}$ .  V  F

c.4) No está en forma escalonada porque el 1 principal de la última fila debería estar en la columna 3.  V  F

F

**Solución** a) b)

La proposición a.1) es F ya que A y B son cuadradas y la matriz A no tiene inversa y la matriz B sí que la tiene, luego no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

La proposición a.2) es V pues A no tiene inversa porque su reducida tiene una fila de ceros y por lo tanto no puede existir  $A^{-1}$  tal que  $AA^{-1} = I$ .

La proposición a.3) es F puesto que  $CI = C$ .

La proposición a.4) es V por definición de matriz inversa de una matriz.  $BB^{-1} = I$ .

## Álgebra

**Ejercicio 2.** (2,5 pts.) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

La alacena de ingredientes mágicos de una hechicera contiene 13 onzas de tréboles y la misma cantidad de hojas de mandrágora. La alacena se repone siempre y cuando la hechicera termina todo lo que tiene. Una poción de amor requiere 4 onzas de tréboles y 2 hojas de mandrágora. Una receta para curar el resfriado requiere 7 onzas de tréboles y 10 hojas de mandrágora.

- Plantea el sistema de ecuaciones lineales (SL)
- Demuestra si el vector  $\mathbf{u}$  ( $2 \times 1$ ) cuyos elementos se corresponden con la cantidad que hay en la alacena de tréboles y de mandrágora es **combinación lineal** del vector  $\mathbf{u}_1$  ( $2 \times 1$ ) formado por las cantidades requeridas para la poción de amor y del vector  $\mathbf{u}_2$  ( $2 \times 1$ ) formado por las cantidades requeridas para la receta del resfriado. Si es el caso, escribe la ecuación de la combinación lineal, si no lo es, explícalo.
- A partir de los resultados obtenidos en b) indica la **cantidad** de la poción de amor y del remedio para el resfriado que debe combinar la hechicera para usar toda la reserva de su alacena.
- Si la hechicera repone la alacena con 26 onzas de trébol y 26 hojas de mandrágora comprobar si el vector  $\mathbf{u}' = (26, 26)^T \in \text{Env}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

**Solución**

- a)  $x$ : poción de amor;  $y$ : receta resfriado.

$$4x + 7y = 13$$

$$2x + 10y = 13$$

- b) El vector  $\mathbf{u}$  es CL de los vectores  $\mathbf{u}_1 = (4, 2)^T$   $\mathbf{u}_2 = (7, 10)^T$  ya que  $\mathbf{u} = (13, 13)^T = 1.5(4, 2)^T + 1(7, 10)^T$

$$[A|\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 2 & 10 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{rref}[A|\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- c) El vector  $\mathbf{u}' \in \text{Env}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

$$[A|\mathbf{u}'] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 26 \\ 2 & 10 & 26 \end{bmatrix} \quad \text{rref}[A|\mathbf{u}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Álgebra

**Ejercicio 3.** (2,5 pts.) Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la factorización LU

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- a) Encontrar una factorización LU de la matriz A.
- b) Usad la factorización anterior para resolver el sistema lineal dado.

**Solución**

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5/2 & 0 \\ 4 & 5 & 20 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & -11/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, 3, -4)^T$$

**Ejercicio 4.** (3 pts.) Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Hallad el **polinomio característico** de A.
- b) Hallad los **valores propios** de A indicando la multiplicidad algebraica de cada uno.
- c) Hallad una **base** para cada subespacio propio indicando su dimensión.
- d) A partir de los resultados obtenidos en b) y c) estudiar si la matriz **A es diagonalizable** teniendo en cuenta la **multiplicidad** de sus valores propios y si es el caso, obtener una matriz diagonal D tal que  **$D = P^{-1}AP$** .

**Solución**

(a)  $q_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0$

(b)  $\lambda_1 = 3$  (doble),  $ma(\lambda_1) = 2$ ;  $\lambda_2 = -2$ ,  $ma(\lambda_2) = 1$

(c) Para  $\lambda_1 = 3 \rightarrow \text{Env}\{(1,0,0), (0,-4,1)\}$ ,  $mg(\lambda_1) = 2$ .

Para  $\lambda_2 = -2 \rightarrow \text{Env}\{(1,1,1)\}$ ,  $mg(\lambda_2) = 1$ .

(d) A es diagonalizable porque para cada  $\lambda$  se verifica que  $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$