

Álgebra

Ejercicio 1. (2 ptos) Matrices y Operaciones.

a) (1 pto) Sean los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pertenece a $\text{Env} \{ v_1, v_2, v_3 \}$

Determina si el vector u

Solución

El vector u pertenece a la envoltura si existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = u$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es determinado con solución única, tenemos que u sí pertenece a la envoltura.

b) (1 pto) Sea $S = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ un conjunto de vectores de \mathbb{R}^4 , donde:

$$v_1 = (1, 2, -2, 1), \quad v_2 = (-3, 0, -4, 3), \quad v_3 = (2, 1, 1, -1), \quad v_4 = (-3, 3, -9, 6), \quad v_5 = (9, 3, 7, -6).$$

Determina una **base para S** formada por vectores del conjunto S.

Solución

Paso 1: Formamos la ecuación:

$$c_1(1, 2, -2, 1) + c_2(-3, 0, -4, 3) + c_3(2, 1, 1, -1) + c_4(-3, 3, -9, 6) + c_5(9, 3, 7, -6) = 0$$

Paso 2: se obtiene el sistema homogéneo asociado:

$$\begin{array}{rcccccc} c_1 & - & + & - & + & = & 0 \\ & 3c_2 & 2c_3 & 3c_4 & 9c_5 & & \\ 2c_1 & & + & + & + & = & 0 \\ & & c_3 & 3c_4 & 3c_5 & & \\ - & - & + & - & + & = & 0 \\ 2c_1 & 4c_2 & c_3 & 9c_4 & 7c_5 & & \\ c_1 & + & - & + & - & = & 0 \\ & 3c_2 & 3c_3 & 6c_4 & 6c_5 & & \end{array}$$

Paso 3: La forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada es:

Álgebra

La base para S está formada por los vectores cuyas columnas tienen unos principales, en este caso son las columnas 1 y 2 que se corresponden con los vectores $\{v_1, v_2\}$

Ejercicio 2. (2,5 pts) Resolución de Sistemas de Ecuaciones con métodos directos

Un fabricante utiliza 4 ingredientes E, F, G y H en la elaboración de un cierto producto alimenticio. Sean x , y , z , y t las cantidades respectivas de E, F, G y H que componen cada producto. Una unidad de cada uno de los ingredientes proporciona vitaminas A, B, C y un número de kilocalorías en las cantidades que se reflejan en la tabla siguiente:

	E	F	G	H
Vitamina A	1	1	1	2
Vitamina B	1	2	1	3
Vitamina C	1	3	2	1
kilocalorías	2	2	1	1

Si designamos respectivamente miligramos de vitamina A, B, C tendrá el producto elaborado pide:

por u , v , r y w a los y a las kilocalorías que por los 4 ingredientes, se

- a) (0,5 pts) Expresa **matricialmente** la relación entre las cantidades de x , y , z , t y u , v , r , w .
- b) (1 pto) **Justifica** si es posible x , y , z y t que vitaminas y esas $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \\ w \end{bmatrix}$ dados unos valores fijos de u , v , r y w encontrar de forma única valores de proporcionen esos miligramos de kilocalorías.
- c) (1 pto) Calcula qué **cantidad** de cada ingrediente es necesaria para que la composición del producto conste de 300 mg. de vitamina A, 430 mg. de B, 320 mg. de C y 250 kilocalorías.

Solución

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) El sistema es siempre compatible determinado porque la matriz de coeficiente es invertible, lo que se puede comprobar calculando su determinante.

c) Resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 430 \\ 310 \\ 250 \end{bmatrix}$$

Álgebra

Se obtiene la solución $x = 20$, $y = 30$, $z = 50$, $t = 100$

Ejercicio $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 7/2 & 19/2 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** (2,5 ptos.) Resolución de de Ecuaciones Lineales mediante factorización LU

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales matrices:

resolver el siguiente sistema de $Ax = b$ dado por las siguientes

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- a) (1'25 ptos) Encuentra una **factorización LU** de la matriz A.
- b) (1'25 ptos) Usa la factorización anterior para **resolver** el sistema lineal dado.

Solución

a)

b) $x_1 = 12$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$

Ejercicio 4. (3 ptos) Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 18 & -8 \end{bmatrix}$$

- a) (0'5 ptos) Calcula el **polinomio característico**.

Álgebra

- b) (0'5 ptos) Calcula los **valores propios**
- c) (1 pto) Consigue una **base** para cada subespacio propio indicando su dimensión.
- d) (1 pto) A partir de los resultados obtenidos escribe una matriz diagonal D tal que **$D = P^{-1}A P$** .

Solución

(a) $-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$

(b) $\lambda = 1$ (doble), $\lambda = -2$ (simple)

(c) Para $\lambda = 1$, base $B_1 = \{(1,0,0), (0,-4,1)\}$, $\dim(B_1) = 2$; para $\lambda = -2$, base $B_2 = \{(1,1,1)\}$, $\dim(B_2) = 1$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$