

Álgebra

Alumn@											
Ejercicio 1 (2 ptos)		Ejercicio 2 (2,5 ptos)			Ejercicio 3 (2,5 ptos.)		Ejercicio 4 (3 ptos.)			NOTA	
1.a (1p)	1.b (1p)	2.a (.5p)	2.c (1p)	2.d (1p)	3.a (1,25p)	3.b(1,25p)	4.a(.5p)	4.b(.5p)	4.c(.1p)	4.d(1p)	

Ejercicio 1. (2 ptos) Espacios vectoriales

a) (1 pto) Sean los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Determina si el vector **u** pertenece a $\text{Env} \{ v_1, v_2, v_3 \}$

b) (1 pto) Sea $S = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ un conjunto de vectores de \mathbb{R}^4 , donde:

$$v_1 = (1,2,-2,1), \quad v_2 = (-3,0,-4,3), \quad v_3 = (2,1,1,-1), \quad v_4 = (-3,3,-9,6), \quad v_5 = (9,3,7,-6).$$

Determina una **base para S** formada por vectores del conjunto S.

Solución

(a) El vector **u** pertenece a la envoltura si existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = u$.

Escribimos el sistema homogéneo asociado.

Al resolver este sistema obtenemos $c_1=3, c_2 = -1$ y $c_3 = 2$ luego **u** si pertenece a la envoltura.

(b) Formamos la ecuación:

$$c_1 (1,2,-2,1) + c_2 (-3,0,-4,3) + c_3 (2,1,1,-1) + c_4 (-3,3,-9,6) + c_5 (9,3,7,-6) = (0,0,0,0)$$

Al resolver este sistema homogéneo obtenemos la matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como las columnas 1 y 2 tienen unos principales, la base para S estará formada por los vectores $\{v_1, v_2\}$

Ejercicio 2. (2,5 ptos) Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con métodos directos

Un fabricante produce tres artículos diferentes (A, B y C), cada uno de los cuales precisa para su elaboración tres materias primas (M1, M2 y M3). La siguiente tabla representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto:

	A	B	C
M1	1	3	5
M2	5	2	3
M3	3	3	6

Se dispone de 100 unidades de M1, 110 de M2 y 135 de M3 y hay que determinar las cantidades de artículos A, B y C que produce dicho fabricante

- (a) (1 punto) Plantea un sistema de ecuaciones que solucione el problema.
 (b) (1 punto) Resuelve el sistema anterior.
 (c) (0'5 puntos) Si los precios de venta de cada artículo son respectivamente, 250, 300 y 350 euros y gasta en cada unidad de materia prima 25, 30 y 15 euros respectivamente, determina el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos disponibles).

Solución:

- (a) Llamando x , y , z a las unidades producidas de A, B y C respectivamente formamos el sistema:

$$x + 3y + 5z = 100$$

$$5x + 2y + 3z = 110$$

$$3x + 3y + 6z = 135$$

- (b) La solución del sistema es: $x = 11$, $y = 8$, $z = 13$

- (c) Ingresos: $11 \cdot 250 + 8 \cdot 300 + 13 \cdot 350 = 9700$
 Gastos: $100 \cdot 25 + 110 \cdot 30 + 135 \cdot 15 = 7825$
 Beneficios: $9700 - 7825 = 1.875$ euros

Álgebra

Ejercicio 3. (2,5 ptos.) Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante la factorización LU

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ dado por las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- a) (1'25 ptos) Encuentra una **factorización LU** de la matriz A.
- b) (1'25 ptos) Usa la factorización anterior para **resolver** el sistema lineal dado.

Solución

(a)

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2,5 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (1, -3, 2)$$

Ejercicio 4. (3 ptos) Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices.

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- a) (0'5 ptos) Calcula el **polinomio característico**.
- b) (0'5 ptos) Calcula los **valores propios**.
- c) (1 pto) Consigue una **base** para cada subespacio propio indicando su dimensión.
- d) (1 pto) A partir de los resultados obtenidos escribe una matriz diagonal D tal que **$D = P^{-1}AP$** .
Escribe también la matriz P.

Solución

(a) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 19\lambda - 20 = 0$

(b) $\lambda = 1$ (simple), $\lambda = 5$ (simple), $\lambda = -4$ (simple)

(c) Para $\lambda = 1$, base $B1 = \{(1, -1, 0)\}$, $\dim(B1) = 1$; para $\lambda = -4$, base $B2 = \{(1, -6, 0)\}$, $\dim(B2) = 1$;

Álgebra

para $\lambda = 5$, base $B_3 = \{(-1,0,-1)\}$, $\dim(B_3) = 1$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$