

## SOLUCIÓN EXAMEN de Álgebra

Enero 2018

Alumn @					Profesor					NOTA	
Ejerc 1 (4,25 p)					Ejerc 2 (1,75 p)		Ejerc 3 (4 p)				
a).75p	b).75p	c) 1p	d) 1p	e).75p	a) 1p	b).75p	a).5p	b).5p	c) 1,5p	d) 1,5p	

**Ejercicio 1.** Las matrices A y B referencian matrices ampliadas relativas a sistemas lineales de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Explica si las matrices A y B están **escalonadas**, y si no, escribe una escalonada de ellas.

A y B son matrices escalonadas ya que la entrada de cada fila tiene unos principales y por debajo ceros.

- b) Plantea los sistemas que definen cada una de las matrices escalonadas y **calcula su solución**.

**SL Ax = b:**  $x + y - 5/2z = 1;$       $y + 3/2z = -2;$       $z = 3/2$   
Solución:  $(x, y, z) = (9, -17/4, 3/2)$

**SL Bx = b.**  $x + y - z - 2t = 3;$       $y - 3z - 5t = 4;$   
Solución: parámetros: variables z, t  
 $(x, y, z, t) = (-2z - 3t - 1, 3z + 5t + 4, z, t)$

- c) Escribe una base para el **espacio fila** de cada matriz A y B.

Una base para el espacio FilA y Fil B está formada por las filas de A y B, respectivamente, distintas de cero.

Una base para Fil(A) = Env{ $v_1, v_2, v_3$ },  $v_1 = (1 \ 1 \ -5/2 \ 1)$ ,  $v_2 = (0 \ 1 \ 3/2 \ -2)$ ,  $v_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 3/2)$  y para la matriz B es,

Fil(B) = Env{  $v_3, v_4$ },  $v_3 = (1 \ 1 \ -1 \ -2 \ 3)$ ,  $v_4 = (0 \ 1 \ -3 \ -5 \ 4)$ .

- d) Escribe una base para el **espacio columna** de cada matriz A y B.

La matriz A tiene 3 columnas con uno principal que se corresponden con 3 vectores LI de  $R^3$ . Luego una base para (Col A) = Env{ columna1, columna 2, columna 3) donde columna i,  $i = 1, 2, 3$ , son las columnas de la matriz de coeficientes del SL que tiene una matriz ampliada escalonada de la forma A.

La matriz B tiene 2 columnas con uno principal que se corresponden con 2 vectores LI de  $\mathbb{R}^3$ .

Luego, una base para  $(\text{Col } B) = \text{Env}\{\text{columna } 1, \text{columna } 2\}$  donde columna  $i$ ,  $i = 1, 2$ , son las columnas de la matriz de coeficientes del SL que tiene una matriz ampliada escalonada de la forma B.

e) Explica cuándo un conjunto finito de vectores son **linealmente independientes**.

Demuestra si el conjunto de vectores  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  /  $v_1 = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $v_2 = (1 \ 1 \ 0)$ ,  $v_3 = (-5/2 \ 3/2 \ 1)$ , es linealmente independientes de  $\mathbb{R}^3$ .

Un conjunto finito de vectores  $v_1, \dots, v_n$  se dice que son *linealmente independientes* si existen números  $a_1, \dots, a_n$  tal que la ecuación  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$  se satisface sólo cuando  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . Para comprobar que el conjunto S es LI colocamos los vectores como columnas de una matriz A',

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del SH asociado es única, con valores  $x = y = z = 0$ , luego los vectores son LI.

**Ejercicio 2** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determina **una base** para el espacio propio asociado a cada autovalor  $\lambda$  e indica las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada uno de ellos.

Sol

Autovalor  $\lambda_1 = 2$  (doble)  $ma(\lambda_1) = 2$

$(A - \lambda_1 I) = [0, 2, 3, 4; 0, 0, 3, 2; 0, 0, -1, 1; 0, 0, 0, -1]$

$rref(A - \lambda_1 I) = [0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0]$

$E(\lambda_1) = \text{Env}\{(1 \ 0 \ 0 \ 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ,  $mg(\lambda_1) = 2$ .

Autovalor  $\lambda_2 = 1$  (doble)  $ma(\lambda_2) = 2$

$(A - \lambda_2 I) = [1, 2, 3, 4; 0, 1, 3, 2; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0]$

$rref(A - \lambda_2 I) = [1, 0, -3, 0; 0, 1, 3, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 0]$

$E(\lambda_2) = \text{Env}\{(3 \ -3 \ 1 \ 0)\}$ ,  $mg(\lambda_2) = 1$ .

b) Escribe **dos** autovectores asociados a cada autovalor obtenido.

Autovector asociado a  $\lambda_1 = 2$ ,  $X_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $X_2 = (2 \ 0 \ 0 \ 0)$

Autovector asociado a  $\lambda_2 = 1$ ,  $X_3 = (3 \ -3 \ 1 \ 0)$ ,  $X_4 = (6 \ -6 \ 2 \ 0)$

**Ejercicio 3** Dada la matriz A se debe encontrar la **factorización LU** de A. Sigue los pasos.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

debe encontrar la **factorización LU** de

- ¿Qué **tipo** de matriz es la matriz **L** y que tamaño tiene? ¿y la matriz U?  
**L es una matriz triangular inferior de tamaño (5x5). U es una matriz escalonada triangular superior (5x4)**
- Inicialmente en el proceso de la factorización ¿qué **valor** le damos a la matriz L?  
**L coincide con la matriz identidad I (5x5).**
- Factoriza A** indicando en cada paso las columnas de A que forman parte de L.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">-9</td><td style="padding: 2px;">-5</td><td style="padding: 2px;">8</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-7</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">-1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">-6</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">L</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">-6</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> </table>	A	2	-4	-2	3		6	-9	-5	8		2	-7	-3	9		4	-2	-2	-1		-6	3	3	4	L	2	0	0	0		6	1	0	0		2	0	1	0		4	0	0	1		-6	0	0	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">-1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">-1</td><td style="padding: 2px;">6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-9</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">13</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">L</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">-6</td><td style="padding: 2px;">-9</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> </table>	A	2	-4	-2	3		0	3	1	-1		0	-3	-1	6		0	6	2	-7		0	-9	-3	13	L	2	0	0	0		6	3	0	0		2	-3	1	0		4	6	0	1		-6	-9	0	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">-1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">10</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">L</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">-5</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">-6</td><td style="padding: 2px;">-9</td><td style="padding: 2px;">10</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> </table>	A	2	-4	-2	3		0	3	1	-1		0	0	0	5		0	0	0	-5		0	0	0	10	L	2	0	0	0		6	3	0	0		2	-3	5	0		4	6	-5	1		-6	-9	10	0
A	2	-4	-2	3																																																																																																																																																				
	6	-9	-5	8																																																																																																																																																				
	2	-7	-3	9																																																																																																																																																				
	4	-2	-2	-1																																																																																																																																																				
	-6	3	3	4																																																																																																																																																				
L	2	0	0	0																																																																																																																																																				
	6	1	0	0																																																																																																																																																				
	2	0	1	0																																																																																																																																																				
	4	0	0	1																																																																																																																																																				
	-6	0	0	1																																																																																																																																																				
A	2	-4	-2	3																																																																																																																																																				
	0	3	1	-1																																																																																																																																																				
	0	-3	-1	6																																																																																																																																																				
	0	6	2	-7																																																																																																																																																				
	0	-9	-3	13																																																																																																																																																				
L	2	0	0	0																																																																																																																																																				
	6	3	0	0																																																																																																																																																				
	2	-3	1	0																																																																																																																																																				
	4	6	0	1																																																																																																																																																				
	-6	-9	0	1																																																																																																																																																				
A	2	-4	-2	3																																																																																																																																																				
	0	3	1	-1																																																																																																																																																				
	0	0	0	5																																																																																																																																																				
	0	0	0	-5																																																																																																																																																				
	0	0	0	10																																																																																																																																																				
L	2	0	0	0																																																																																																																																																				
	6	3	0	0																																																																																																																																																				
	2	-3	5	0																																																																																																																																																				
	4	6	-5	1																																																																																																																																																				
	-6	-9	10	0																																																																																																																																																				

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">L</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">-1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-1</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">10</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-1</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">-3</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> </table>	A	2	-4	-2	3	L	0	3	1	-1		0	0	0	5		0	1	0	-5		0	-1	0	10		2	2	-1	1		-3	-3	2	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">U</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">-4</td><td style="padding: 2px;">-2</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0U</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">-1</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">-5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">10</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> </table>	U	2	-4	-2	3	0U	3	1	-1	0		0	0	0	5		0	0	0	-5		0	0	0	10		0	0	0	0		0	0	0	0
A	2	-4	-2	3																																																																			
L	0	3	1	-1																																																																			
	0	0	0	5																																																																			
	0	1	0	-5																																																																			
	0	-1	0	10																																																																			
	2	2	-1	1																																																																			
	-3	-3	2	0																																																																			
U	2	-4	-2	3																																																																			
0U	3	1	-1	0																																																																			
	0	0	0	5																																																																			
	0	0	0	-5																																																																			
	0	0	0	10																																																																			
	0	0	0	0																																																																			
	0	0	0	0																																																																			

- Una vez de ellas obtenidas L y U **elige** cuál debe aparecer con unos en la diagonal y consíguelos. Termina comprobando que efectivamente **A = LU**.