

## SOLUCIÓN EXAMEN de Álgebra

julio 2018

Alumn@						Profesor		
Ejercicio 1 (2,5 p)	Ejercicio 2 (2 p)	Ejercicio 3 (3 p)		Ejercicio 3 (2,5 p)			NOTA	

**Ejercicio 1** Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

- a) Calcula una sucesión de matrices elementales que transformen la matriz A en la identidad.
- b) Expresa  $A^{-1}$  como producto de elementales

### Solución

- a) Cada operación elemental aplicada a una matriz A equivale a multiplicarla por la izquierda por alguna matriz elemental EA. La matriz elemental correspondiente es la obtenida al aplicarle la misma operación a la matriz identidad I.

$$\begin{aligned}
 [2,1,1,0;5,3,0,1] &\rightarrow (F1 <- 1/2F1) && [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0; 5,3,0,1] \\
 &\rightarrow (F2 <- F2-5F1) && [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0; 0, \frac{1}{2}, -5/2, 1] \\
 &\rightarrow (F2 <- 2F2) && [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0; 0, 1 -5, 2] \\
 &\rightarrow (F1 <- F1-1/2F2) && [1, 0, 3, -1; 0, 1 -5, 2]
 \end{aligned}$$

Según lo anterior  $E12(-1/2)E2(2)E21(-5)E1(1/2)A = I$  o bien

$$[1^{-1}/2; 0,1] [1,0; 0,2] [1,0; -5,1] [1/2,0; 0,1] [2,1;5,3] = [1,0; 0,1]$$

- b)  $A^{-1} = [3,-1; -5,2] = E12(-1/2)E2(2)E21(-5)E1(1/2);$   
 $A^{-1} = [1^{-1}/2; 0,1] [1,0; 0,2] [1,0; -5,1] [1/2,0; 0,1] [2,1;5,3]$

**Ejercicio 2.** Sea  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  un conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^4$  donde:

$$v_1 = (1, 2, -2, 1), \quad v_2 = (-3, 0, -4, 3), \quad v_3 = (2, 1, 1, -1), \quad v_4 = (-3, 3, -9, 6), \quad v_5 = (9, 3, 7, -6).$$

Determina una base para  $\text{Env}(S)$  formada por vectores del conjunto S.

### Solución

1º Se forma la ecuación

$$c_1 (1, 2, -2, 1) + c_2 (-3, 0, -4, 3) + c_3 (2, 1, 1, -1) + c_4 (-3, 3, -9, 6) + c_5 (9, 3, 7, -6) = (0, 0, 0, 0)$$

2º Se obtiene el SH asociado:

$$\begin{aligned}
 c_1 - 3c_2 + 2c_3 - 3c_4 + 9c_5 &= 0 \\
 2c_1 + c_3 + 3c_4 + 3c_5 &= 0 \\
 -2c_1 - 4c_2 + c_3 - 9c_4 + 7c_5 &= 0 \\
 c_1 + 3c_2 - c_3 + 6c_4 - 6c_5 &= 0
 \end{aligned}$$

3º Se obtiene la forma escalonada reducida:

$$[ 1, 0, \frac{1}{2}, 3/2, 3/2, 0; 0, 1, -1/2, 3/2, -5/2, 0; 0,0,0,0,0; 0,0,0,0,0]$$

Como los unos principales aparecen en las columnas 1 y 2, tenemos que los vectores  $[v_1, v_2]$  forman una base para  $\text{Env}(S)$

**Ejercicio 3** Considera la matriz A /

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Calcula una descomposición LU de A.

b) Utiliza la descomposición LU para resolver el sistema  $Ax = b$  /  $b = [-14 \ -6 \ 1]^T$

**Solución**

la forma escalonada se obtiene:

$$A = [2, 4, -2; 1, 1, -4; 0, 2, 9] \rightarrow [1,2,-1; 1,1,-4; 0,2,9] \rightarrow [1,2,-1; 0,-1,-3; 0,2,9] \rightarrow [1,2,-1; 0, 1, 3; 0,2,9] \rightarrow [1,2,-1; 0, 1,-3; 0,0,3] \rightarrow [1,2,-1; 0, 1, 3; 0,0,1]$$

$$L = [ 2,0,0; 1,-1,0; 0,2,3] \quad U = [1,2,-1; 0, 1, 3; 0,0,1]$$

b) Para resolver el sistema  $LUx = b$  se resuelve primero  $Ly = b$  y posteriormente  $Ux = y$ , ambos por sustitución. El primer sistema:

$$Ly = b \rightarrow [ 2,0,0; 1,-1,0; 0,2,3] y = [-14 \ -6 \ 1]^T \rightarrow y = [-7 \ -1 \ 1]^T$$

$$Ux = y \rightarrow [1,2,-1; 0, 1, 3; 0,0,1] x = [-7 \ -1 \ 1]^T$$

Solución del sistema  $Ax = b$ ,  $x = [2 \ -4 \ 1]^T$

**Ejercicio 4** Considera la matriz A /

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcula los valores propios de A escribiendo su polinomio característico.

b) Para cada valor propio consigue una base del correspondiente subespacio propio.

**Solución**

a) El polinomio característico es  $-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$  y los valores propios son 2 (doble) y 5 simple.

b)  $E_A(2) = \text{Env}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$  y  $E_A(5) = \text{Env}\{(1,1,1)\}$ .