Alumn@	**Profesor**

Ejercicio 1 (2,00 p)		Ejercicio 2 (2,50 p)		Ejercicio 3 (2,50 p)		Ejercicio 4 (3,00 p)		**NOTA**
a) 1.50p	b) 0.50p	a) 1.00p	b) 1.50p	a) 1.00p	b) 1.50p	a) 1.00p	b) 2.00p	

Ejercicio 1. La Agencia Aeroespacial de la UA (AAUA!) desarrolla el software de aterrizaje automático de la sonda Scacharrelly que será enviada a Marte. La sonda cuenta con 3 MOtores TÁntricos de Impulso (MOTAI) para corregir la orientación en sus 3 ángulos (yaw, pitch y roll) durante el aterrizaje. El software debe mantener la orientación que maximice el drag (roce con la atmósfera) para frenar rápidamente. La especificación dice que consumir 1 mg de oxitocina en cada MOTAI produce los siguientes cambios de orientación (en grados):

	M1	**M2**	**M3**
yaw	3	9	8
pitch	0	9	72
roll	3	8	0

En un momento del descenso, la nave necesita cambiar de orientación 3º yaw, 9º pitch y 2º roll para conseguir el máximo drag.

(a) **[1.50p]** Calcula todas las combinaciones de mg de oxitocina que aplicadas a cada MOTAI orienten la nave hacia el máximo drag.

SOLUCIÓN:

Las combinaciones posibles vienen dadas por la solución a la ecuación A x = b, siendo

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 0 & 9 & 72 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad y \quad b = \begin{vmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Queremos conseguir 3º yaw, 9º pitch y 2º roll. X serán los mg de oxitocina a aplicar en cada MOTAI. Resolvemos el sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & 9 & 72 & 9 \\ 3 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} F1 \leftarrow 1/3\, F1 \\ \\ F3 \leftarrow F3 - F1 \end{array} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 9 & 72 & 9 \\ 0 & -1 & -8 & -1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \\ F2 \leftrightarrow F3 \\ F2 \leftarrow (-1)\, F2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 72 & 9 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \\ \\ F3 \leftarrow F3 - 9F2 \end{array} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} F1 \leftarrow F1 - 3\, F2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Alumn@	**Profesor**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -64/3 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Forma Escalonada-Reducida

A partir de la forma escalonada-reducida de la matriz ampliada [A | b] obtenemos la solución parametrizada con $x_3 = \alpha$

$$x = \begin{bmatrix} -2 + 64/3\alpha \\ 1 - 8\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 64/3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dando valores al parámetro α obtenemos todas las posibles combinaciones de mg de oxitocina que aplicadas a los MOTAI M1, M2 y M3 producen la orientación deseada.

(b) **[0.50p]** Sabiendo que el MOTAI M3 se ha quedado sin oxitocina, ¿Sería aún posible orientar la nave para obtener el máximo drag? ¿Cuánta oxitocina consumiría cada motor si fuera posible?

Para orientar la nave sin gastar combustible en M3, la solución debería ser de la forma $x = [\, a \;\; b \;\; 0 \,]$, con $a, b \in \boldsymbol{R}$.
Para $x_3 = 0$ debe cumplirse que $0 + 1\,\alpha = 0$, de lo que se deduce que $\alpha = 0$, siendo la solución:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta solución negativa necesitaría aplicar una cantidad negativa de miligramos de oxitocina al MOTAI M1, lo que resulta imposible. Por lo tanto, NO es posible orientar la nave para obtener el máximo drag sin oxitocina en el MOTAI M3.

Alumn@	**Profesor**

Ejercicio 2. Tenemos la siguiente matriz A, con $a, b \in \boldsymbol{R}$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

(a) **[1.00p]** ¿Existe algún valor para a y b de forma que A se pueda considerar una matriz elemental? Justifica tu respuesta. En caso afirmativo indica qué operación elemental se ha realizado para obtenerla y cuál sería su matriz inversa.

SOLUCIÓN:
Sí. Para que A fuera una matriz elemental necesariamente a=0 y b=1.
De esta forma, se obtiene la matriz elemental $E_{13}(-1/5)$ aplicando la operación elemental de tipo 3 $F1 \leftarrow F1 + (-1/5)F3$
Su matriz inversa sería $E_{13}(1/5)$:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) **[1.50p]** Encuentra una factorización LU para la siguiente matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:
0.- En el paso inicial L es la matriz Identidad 3x3 y U es una matriz 3x4 igual a A

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Alumn@	Profesor

1.- Se copia columna 1 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en la columna 1.

$$L = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{5} & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 & -15/2 & -11 \end{vmatrix}$$

F1 ← 1/2 F1 F2 ← F2 - F1
F3 ← F3 - 5F1

2.- Se copia columna 2 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en la columna 2.

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{-1/2} & 0 \\ 5 & \mathbf{-3/2} & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & -3/2 & -15/2 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -14 \end{vmatrix}$$

F2 ← -2 F2 F3 ← F3 + 3/2 F2

3.- Se copia columna 3 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en la columna 3.

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 5 & -3/2 & \mathbf{-9} \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 14/9 \end{vmatrix}$$

F3 ← -1/9 F3

Por tanto, una factorización LU para A es:

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 5 & -3/2 & -9 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 14/9 \end{vmatrix}$$

Otra posible factorización se obtiene dividiendo cada columna de L por su elemento diagonal y multiplicando la fila correspondiente de U por dicho elemento. De esta forma los unos principales aparecen en la matriz L

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -14 \end{vmatrix}$$

Alumn@	**Profesor**

Ejercicio 3. Resuelve los siguientes dos apartados, justificando claramente los pasos que aplicas

(a) **[1.00p]** Comprueba si los conjuntos **S1** y **S2** son subespacios vectoriales de $\mathbf{R^3}$:

- $S1 = \{ (x, y, 0): x, y \in R \mid x + y = 0 \}$
- $S2 = \{ (a, 0, a-1): a \in R \}$

SOLUCIÓN:
Para que un subconjunto no vacío S de R^3 sea subespacio vectorial se tienen que cumplir las siguientes condiciones:
a) El vector nulo (0, 0, 0) tiene que pertenecer a S
b) Si un vector está en S, también lo están sus múltiplos, es decir, $\forall u \in S$, $\alpha \in R$ entonces $\alpha u \in S$
c) Si dos vectores están en S, también lo está su suma, es decir, $\forall u,v \in S$ entonces $u+v \in S$

* Se comprueba para el subespacio S1:
a) El vector nulo $(0, 0, 0) \in S1$, puesto que 0+0=0
b) Sea $u = (x, y, 0) \in S1$; entonces $x+y=0$.
Para cualquier $\alpha \in R$, $\alpha u = \alpha(x, y, 0) = (\alpha x, \alpha y, 0)$
Se cumple que $(\alpha x, \alpha y, 0) \in S1$ puesto que $\alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = \alpha 0 = 0$
c) Sean $u = (x, y, 0)$ y $v = (x', y', 0) \in S1$; entonces $x+y=0$ y $x'+y'=0$
$u+v = (x, y, 0) + (x', y', 0) = (x+x', y+y', 0)$
Entonces tiene que cumplirse que $x+x'+y+y'=0$
$x+x'+y+y' = (x+y)+(x'+y') = 0$, por tanto, $u+v \in S1$
De esta forma, se puede afirmar que S1 SÍ es un subespacio vectorial de R^3
* Se comprueba para el subespacio S2:
a) El vector nulo $(0, 0, 0) \notin S2$, puesto que no hay forma de encontrar ningún $a \in R$ de manera que $a=0$ y $a-1=0$ al mismo tiempo
De esta forma, se puede afirmar que S2 NO es un subespacio vectorial de R^3

(b) **[1.50p]** Halla una base de los subespacios Columna, Fila y Nulo de la siguiente matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN:
El primer paso es hallar la forma escalonada reducida de A. Para ello se aplica Gauss-Jordan:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{* Uno principal Columna 1} \\ F2 \leftarrow F2 + F1 \\ F3 \leftarrow F3 - 2F1 \end{matrix} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Alumn@	Profesor

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

* Uno principal Columna 2

$F2 \leftarrow 1/4F2$

$F3 \leftarrow F3 - 4F2$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

* Hacer 0 encima uno principal Columna 2

$F1 \leftarrow F1 - F2$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por tanto, la forma escalonada reducida de la matriz A es:

$$\text{rref}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.- Para el Subespacio Columna de A (Col A), la base está formada por los vectores columna de A que sean linealmente independientes. Al ser 4 vectores columna $\in R^3$, la base estará formada como mucho por 3 vectores linealmente independientes.
En cualquier caso, las columnas de la reducida de A que tienen un 1 principal forman la base del Subespacio Col A. En este caso, las columnas de A que tienen 1 principal son la 1 y la 2, por lo que:

Base (Col A) = { (1, -1, 2) , (1, 3, 6) }

Se puede comprobar a través de la reducida de A que los vectores que corresponden a las columnas 3 y 4 son combinación lineal de los vectores correspondientes a las columnas 1 y 2, ya que:

(0, -1, -1) = 1/4(1, -1, 2) - 1/4(1, 3, 6)
(1, 2, 5) = 1/4(1, -1, 2) + 3/4(1, 3, 6)

2.- Para el Subespacio Fila de A (Fil A), la base está formada por los vectores fila de A que sean linealmente independientes. Se trata en este caso de 3 vectores fila $\in R^4$.
En cualquier caso, las filas de la reducida de A que tienen un 1 principal forman la base del Subespacio Fil A. En este caso, las filas de A que tienen 1 principal son la 1 y la 2, por lo que:

Base (Fil A) = { (1, 1, 0, 1) , (-1, 3, -1, 2) }

Se puede comprobar que el vector que corresponde a la fila 3 es combinación lineal del los vectores correspondientes a las filas 1 y 2, ya que:

(2, 6, -1, 5) = 3(1, 1, 0, 1) + (-1, 3, -1, 2)

Alumn@	**Profesor**

3.- Para el Subespacio Nulo de A (Nul A), la base está formada por las soluciones del sistema homogéneo Ax = 0.
A partir de la reducida de A, se obtiene la matriz ampliada del sistema homogéneo:

$$[A|0] = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Al ser el número de 1 principales menor que el número de incógnitas, se trata de un sistema compatible indeterminado. Los parámetros corresponden a las incógnitas x_3 y x_4. Despejando se obtiene:

$$x_1 \quad + 1/4x_3 + 1/4x_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1/4x_3 - 1/4x_4$$
$$x_2 - 1/4x_3 + 3/4x_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1/4x_3 - 3/4x_4$$

De esta forma, las soluciones del sistema homogéneo tienen la siguiente estructura:

$$(-1/4x_3 - 1/4x_4,\ 1/4x_3 - 3/4x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3(-1/4, 1/4, 1, 0) + x_4(-1/4, -3/4, 0, 1)$$

Así, **Base (Nul A) = { (-1/4, 1/4, 1, 0) , (-1/4, -3/4, 0, 1) }**

Alumn@	**Profesor**

Ejercicio 4. Dada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

(a) **[1.00p]** Razona por qué uno de sus auto-valores es $\lambda=0$ sin realizar los cálculos

SOLUCIÓN:
Por definición, un auto-valor satisface la ecuación característica $det(A - \lambda I) = 0$. Tendremos $\lambda = 0$ cuando $\det(A) = 0$, es decir, cuando la matriz A no sea invertible. Así, como en la matriz A tenemos que la tercera fila es una combinación lineal de las otras dos, eso nos lleva a que $det(A) = 0$ y por lo tanto uno de sus auto-valores es 0.

(b) **[2.00p]** Calcula los auto-valores λ_i de A, y el auto-vector asociado con $\lambda=0$

- Comprueba que *det*(A) = $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
- Comprueba que *tr*(A) = $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$., siendo *tr*(A) la traza de la matriz

SOLUCIÓN:
Para calcular los autovalores de A, hallamos en primer lugar la ecuación característica: $det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 2(-3 - \lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(-3 - \lambda) - 2(-3 - \lambda) =$
$= (-\lambda^3 + 7\lambda - 6) + 6 + 2\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda$
$-\lambda^3 + 9\lambda = 0$
$\lambda(-\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow$ 1) $\boldsymbol{\lambda = 0}$ 2) $-\lambda^2 + 9 = 0$; $\lambda^2 = 9$; $\boldsymbol{\lambda = 3}$ $\boldsymbol{\lambda = -3}$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$ $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ $\boldsymbol{\lambda_3 = -3}$ son los auto-valores de A

Se demuestra que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ y que $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
$\det(A) = 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 * 3 * (-3) = 0$
$tr(A) = 1 + 2 + (-3) = 0$, y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 3 + (-3) = 0$

Alumn@	**Profesor**

Por último, para calcular el auto-vector asociado a $\lambda = 0$ se resuelve el sistema homogéneo asociado a A (A x = 0) aplicando Gauss-Jordan:

$$[A|0] = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right|$$

* Uno principal Columna 1

$F2 \leftarrow F2 - F1$

$$[A|0] = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right|$$

* Uno principal Columna 3

$F3 \leftarrow -(1/3)\ F3$

$$[A|0] = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

* Uno principal Columna 3

$F2 \leftarrow F2 - 3\ F3$

$$[A|0] = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

Una vez obtenida la forma escalonada-reducida de la matriz [A | 0], al ser el número de unos principales (2) menor que el número de incógnitas (3), se trata de un sistema compatible indeterminado. El parámetro corresponde a la incógnita x_2 (columna que no tiene uno principal), por lo que $x_2 = \alpha$ Despejando se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad &= 0 \implies x_1 = -2x_2 = -2\alpha \\ x_2 \quad &= \alpha \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esta forma, las soluciones tienen la estructura $(-2\alpha, \alpha, 0) = \alpha\,(-2, 1, 0)$.
Por tanto, un auto-vector asociado a $\lambda = 0$ sería **(-2, 1, 0)**