

Alumn@				Profesor			
--------	--	--	--	----------	--	--	--

Ejercicio 1 (2,00 p)		Ejercicio 2 (2,50 p)		Ejercicio 3 (2,50 p)		Ejercicio 4 (3,00 p)		NOTA
a) 1.50p	b) 0.50p	a) 1.00p	b) 1.50p	a) 1.00p	b) 1.50p	a) 1.00p	b) 2.00p	

**Ejercicio 1.** La Agencia Aeroespacial de la UA (AAUA!) desarrolla el sistema operativo LunaTIC-OS para el control de satélites Másar lunares. Cada satélite cuenta con 3 de los conocidos MOTores TÁntricos de Impulso (MOTAI) para corregir su orientación en sus 3 ángulos (yaw, pitch y roll). El software debe orientar los satélites con precisión para apuntar sus Másares a zonas de la superficie lunar. Por cada 1 mg de oxitocina consumido por los MOTAI, la orientación del satélite cambia de la siguiente forma (en grados):

	M1	M2	M3
<b>yaw</b>	3	12	21
<b>pitch</b>	3	13	30
<b>roll</b>	2	9	23

Antes de poder disparar el Másar, necesitamos orientar uno de nuestros satélite desde tierra.

- (a) [1.50p] Calcula todas las combinaciones de mg de oxitocina que cambien la orientación del satélite en 9º yaw, 10º pitch y 7º roll.

### SOLUCIÓN:

Las combinaciones posibles vienen dadas por la solución a la ecuación  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , siendo

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 21 \\ 3 & 13 & 30 \\ 2 & 9 & 23 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 9 \\ 10 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Queremos conseguir 9º yaw, 10º pitch y 7º roll.  $\mathbf{x}$  serán los mg de oxitocina a aplicar en cada MOTAI. Resolvemos el sistema:

$$\begin{vmatrix} 3 & 12 & 21 & 9 \\ 3 & 13 & 30 & 10 \\ 2 & 9 & 23 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} F1 \leftarrow 1/3 F1 \\ F2 \leftarrow F2 - 3F1 \\ F3 \leftarrow F3 - 2F1 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} F3 \leftarrow F3 - F2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} F1 \leftarrow F1 - 4F2 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -29 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

<b>Alumn@</b>	<b>Profesor</b>
---------------	-----------------

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -29 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{Forma Escalonada-Reducida}$$

A partir de la forma escalonada-reducida de la matriz ampliada  $[A | b]$  obtenemos la solución parametrizada con  $x_3 = \alpha$

$$x = \begin{vmatrix} -1 + 29\alpha \\ 1 - 9\alpha \\ \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 29 \\ -9 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Dando valores al parámetro  $\alpha$  obtenemos todas las posibles combinaciones de mg de oxitocina que aplicadas a los MOTAI M1, M2 y M3 producen la orientación deseada.

- (b) [0.50p] Tras enviar la orden desde la tierra, el satélite se ha orientado e informa un consumo de 0,05 mg de oxitocina en el MOTAI M3, ¿Ha podido cambiar la nave correctamente de orientación en 9º yaw, 10º pitch y 7º roll? ¿Cuánto han consumido los otros dos MOTAI?

Para que la nave cambie de orientación en 9º yaw, 10º pitch, 7º roll, su consumo de combustible debe cumplir la siguiente condición (obtenida del apartado a))

$$x = \begin{vmatrix} -1 + 29\alpha \\ 1 - 9\alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$$

Con  $\alpha \in \mathbf{R}$

Si sabemos que el MOTAI M3 ha consumido 0,05 mg de oxitocina, entonces  $\alpha = 0,05$  para poder cumplir la condición. Lo que nos dejaría el siguiente resultado, sustituyendo  $\alpha$

$$x = \begin{vmatrix} -1 + 29(0.05) \\ 1 - 9(0.05) \\ 0.05 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.45 \\ 0.55 \\ 0.05 \end{vmatrix}$$

Lo que es un resultado completamente factible, siempre que los MOTAI dispongan de esa cantidad de combustible, por lo que la nave **SI** que ha podido quedar correctamente orientada. Además, habrá consumido **0.45 mg** de oxitocina en MOTAI **M1**, **0.55 mg** en MOTAI **M2** y **0.05 mg** en MOTAI **M3**.

Alumn@	Profesor

**Ejercicio 2.** Tenemos la siguiente matriz A, con  $a, b \in \mathbf{R}$  :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1/3 & 0 & a \end{vmatrix}$$

- (a) **[1.00p]** ¿Existe algún valor para  $a$  y  $b$  de forma que A se pueda considerar una matriz elemental? Justifica tu respuesta. En caso afirmativo indica qué operación elemental se ha realizado para obtenerla y cuál sería su matriz inversa.

**SOLUCIÓN:**

Sí. Para que A fuera una matriz elemental necesariamente  $a=1$  y  $b=0$ .

De esta forma, se obtiene la matriz elemental  $E_{31}(1/3)$  aplicando la operación elemental de tipo 3  $F_3 \leftarrow F_3 + (1/3)F_1$

Su matriz inversa sería  $E_{31}(-1/3)$ :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- (b) **[1.50p]** Encuentra una factorización LU para la siguiente matriz:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{vmatrix}$$

**SOLUCIÓN:**

0.- En el paso inicial L es la matriz Identidad 3x3 y U es una matriz 3x4 igual a A

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{vmatrix}$$

Alumn@	Profesor
--------	----------

1.- Se copia columna 1 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en dicha columna 1.

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 22 \end{vmatrix}$$

$$F1 \leftarrow 1/2 F1$$

$$F2 \leftarrow F2 - F1$$

$$F3 \leftarrow F3 - 2F1$$

2.- Como el siguiente candidato a uno principal está en la columna 2, se copia columna 2 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en dicha columna 2.

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{vmatrix}$$

$$F2 \leftarrow 1/4 F2$$

$$F3 \leftarrow F3 - 8F2$$

3.- Como el siguiente candidato a uno principal está en la columna 3, se copia columna 3 de U a L desde el candidato a uno principal hacia abajo, y después se aplica Gauss para obtener el uno principal en dicha columna 3.

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{vmatrix}$$

$$F3 \leftarrow 1/5 F3$$

Por tanto, una factorización LU para A es:

$$L = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{vmatrix}$$

Otra posible factorización se obtiene dividiendo cada columna de L por su elemento diagonal y multiplicando la fila correspondiente de U por dicho elemento. De esta forma los unos principales aparecen en la matriz L

Alumn@	Profesor
--------	----------

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 14 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 3.** Resuelve los siguientes dos apartados, justificando claramente los pasos que aplicas

(a) [1.00p] Comprueba si los conjuntos **S1** y **S2** son subespacios vectoriales de  $\mathbf{R}^3$ :

- $S1 = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R} \mid x - y + 2z = 0 \}$
- $S2 = \{ (a, b, c) : a, b, c \in \mathbf{R} \mid x \cdot y \cdot z = 0 \}$

**SOLUCIÓN:**

Para que un subconjunto no vacío S de  $\mathbf{R}^3$  sea subespacio vectorial se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

- a) El vector nulo (0, 0, 0) tiene que pertenecer a S
- b) Si un vector está en S, también lo están sus múltiplos, es decir,  $\forall u \in S, \alpha \in \mathbf{R}$  entonces  $\alpha u \in S$
- c) Si dos vectores están en S, también lo está su suma, es decir,  $\forall u, v \in S$  entonces  $u+v \in S$

\* Se comprueba para el subespacio S1:

a) El vector nulo (0, 0, 0)  $\in S1$ , puesto que  $0-0+2\cdot 0 = 0$

b) Sea  $u = (x, y, z) \in S1$ ; entonces  $x-y+2z = 0$ .

Para cualquier  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Se cumple que  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S1$  puesto que  $\alpha x - \alpha y + 2 \alpha z = \alpha(x-y+2z) = \alpha \cdot 0 = 0$

c) Sean  $u = (x, y, z)$  y  $v = (x', y', z') \in S1$ ; entonces  $x-y+2z = 0$  y  $x'-y'+2z' = 0$

$u+v = (x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

Entonces tiene que cumplirse que  $(x+x') - (y+y') + 2(z+z') = 0$

$(x+x') - (y+y') + 2(z+z') = (x-y+2z) + (x'-y'+2z') = 0 + 0 = 0$ , por tanto,  $u+v \in S1$

De esta forma, se puede afirmar que S1 SÍ es un subespacio vectorial de  $\mathbf{R}^3$

\* Se comprueba para el subespacio S2:

a) El vector nulo (0, 0, 0)  $\in S2$ , puesto que  $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

b) Sea  $u = (x, y, z) \in S2$ ; entonces  $x \cdot y \cdot z = 0$ .

Para cualquier  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Se cumple que  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S2$  puesto que  $\alpha x \cdot \alpha y \cdot \alpha z = \alpha^3 \cdot (x \cdot y \cdot z) = \alpha \cdot 0 = 0$

c) Sean  $u = (x, y, z)$  y  $v = (x', y', z') \in S2$ ; entonces  $x \cdot y \cdot z = 0$  y  $x' \cdot y' \cdot z' = 0$

$u+v = (x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$

Entonces tiene que cumplirse que  $(x+x') \cdot (y+y') \cdot (z+z') = 0$

Pero podemos encontrar muchos ejemplos que no cumplan esta condición. Por ejemplo, los vectores (1,1,0) y (0,0,1). Ambos  $\in S2$ , porque  $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$  y  $0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ , pero su suma (1,1,0) + (0,0,1) proporciona el vector (1,1,1), el cual  $\notin S2$  porque  $1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$  por tanto,  $u+v \notin S2$

De esta forma, se puede afirmar que S2 NO es un subespacio vectorial de  $\mathbf{R}^3$

Alumn@	Profesor
--------	----------

(b) [1.50p] Halla una base de los subespacios Columna, Fila y Nulo de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIÓN:**

El primer paso es hallar la forma escalonada reducida de A. Para ello se aplica Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} * \text{ Uno principal Columna 1} \\ F2 \leftarrow F2 - 2F1 \\ F3 \leftarrow F3 - 3F1 \\ F4 \leftarrow F4 - 4F1 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} * \text{ Uno principal Columna 2} \\ F2 \leftarrow -F2 \\ F3 \leftarrow F3 + F2 \\ F4 \leftarrow F4 + F2 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} * 0 \text{ 1ra fila Columna 2} \\ F1 \leftarrow F1 - F2 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la forma escalonada reducida de la matriz A es:

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.- Para el Subespacio Columna de A (Col A), la base está formada por los vectores columna de A que sean linealmente independientes. Como se trata de 3 vectores columna  $\in \mathbb{R}^4$ , la base estará formada como mucho por 3 vectores linealmente independientes.

En cualquier caso, las columnas de la reducida de A que tienen un 1 principal forman la base del Subespacio Col A. En este caso, las columnas de A que tienen 1 principal son la 1 y la 2, por lo que:

<b>Alumn@</b>	<b>Profesor</b>
---------------	-----------------

$$\text{Base (Col A)} = \{ (1, 2, 3, 4), (1, 1, 2, 3) \}$$

Se puede comprobar a través de la reducida de A que el vector que corresponde a la columna 4 es combinación lineal de los vectores correspondientes a las columnas 1 y 2, ya que:

$$(0, -1, -1, -1) = -1(1, 2, 3, 4) + 1(1, 1, 2, 3)$$

2.- Para el Subespacio Fila de A (Fil A), la base está formada por los vectores fila de A que sean linealmente independientes. Se trata en este caso de 4 vectores fila  $\in \mathbb{R}^3$ .

En cualquier caso, las filas de la reducida de A que tienen un 1 principal forman la base del Subespacio Fil A. En este caso, las filas de A que tienen 1 principal son la 1 y la 2, por lo que:

$$\text{Base (Fil A)} = \{ (1, 1, 0), (2, 1, -1) \}$$

Se puede comprobar que los vectores que corresponden a las filas 3 y 4 son combinación lineal de los vectores correspondientes a las filas 1 y 2, ya que:

$$(3, 2, -1) = 1(1, 1, 0) + 1(2, 1, -1)$$

$$(4, 3, -1) = 2(1, 1, 0) + 1(2, 1, -1)$$

3.- Para el Subespacio Nulo de A (Nul A), la base está formada por las soluciones del sistema homogéneo  $Ax = 0$ .

A partir de la reducida de A, se obtiene la matriz ampliada del sistema homogéneo:

$$[A|0] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Al ser el número de 1 principales (2) menor que el número de incógnitas (3), se trata de un sistema compatible indeterminado. Por tanto, el único parámetro corresponde a la incógnita  $x_3$ . Despejando se obtiene:

$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

De esta forma, las soluciones del sistema homogéneo tienen la siguiente estructura:

$$(x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1)$$

Así, **Base (Nul A) = { (1, -1, 1) }**

Alumn@	Profesor
--------	----------

**Ejercicio 4.** Dada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) **[1.00p]** Razona por qué uno de sus auto-valores es  $\lambda=0$  sin realizar los cálculos

**SOLUCIÓN:**

Por definición, un auto-valor satisface la ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Tendremos  $\lambda = 0$  cuando  $\det(A) = 0$ , es decir, cuando la matriz A no sea invertible. Así, como en la matriz A tenemos por ejemplo que la tercera fila es una combinación lineal de las otras dos ( $F_3 = -F_1 - F_2$ ), eso nos lleva a que  $\det(A) = 0$  y por lo tanto uno de sus auto-valores es 0.

(b) **[2.00p]** Calcula los auto-valores  $\lambda_i$  de A, y el auto-vector asociado con  $\lambda=0$

- Comprueba que  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
- Comprueba que  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ , siendo  $\text{tr}(A)$  la traza de la matriz

**SOLUCIÓN:**

Para calcular los autovalores de A, hallamos en primer lugar la ecuación característica:  
 $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda) - (2 - \lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) - (2 - \lambda) = \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(2 - \lambda) - (2 - \lambda) = \\ &= (-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 2 + \lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda \\ &-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \Rightarrow 1) \lambda = 0 \quad 2) -\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 ; \lambda = 2 \text{ (doble)}$$

Por lo tanto,  $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 2$  son los auto-valores de A

Se demuestra que  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  y que  $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$$\det(A) = 0 \text{ y } \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 * 2 * 2 = 0$$

$$\text{tr}(A) = 1 + 2 + 1 = 4, \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 2 + 2 = 4$$

Alumn@	Profesor
--------	----------

Por último, para calcular el auto-vector asociado a  $\lambda = 0$  se resuelve el sistema homogéneo asociado a A ( $A \cdot x = 0$ ) aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{l}
 [A|0] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} * \text{ Uno principal Columna 1} \\ \\ F3 \leftarrow F3 + F1 \end{array} \\
 \\
 [A|0] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} * 0 \text{ 1ra Fila Columna 2} \\ F1 \leftarrow F1 + F2 \end{array} \\
 \\
 [A|0] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} * \text{ Uno principal Columna 2} \\ F2 \leftarrow 1/2 F2 \\ F3 \leftarrow F3 + 2 F2 \end{array} \\
 \\
 [A|0] = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Una vez obtenida la forma escalonada-reducida de la matriz  $[A | 0]$ , al ser el número de unos principales (2) menor que el número de incógnitas (3), se trata de un sistema compatible indeterminado. El parámetro corresponde a la incógnita  $x_3$  (columna que no tiene uno principal), por lo que  $x_3 = \alpha$ . Despejando se obtiene:

$$\begin{array}{l}
 x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = \alpha \\
 x_2 = 0 \\
 x_3 = \alpha
 \end{array}$$

De esta forma, las soluciones tienen la estructura  $(\alpha, 0, \alpha) = \alpha (1, 0, 1)$ .

Por tanto, un auto-vector asociado a  $\lambda = 0$  sería  $(1, 0, 1)$ . Otros ejemplos serían  $(2, 0, 2)$ ,  $(3, 0, 3)$ ,...

Se puede comprobar que  $A \cdot x = \lambda \cdot x$ , es decir,  $A \cdot [1 \ 0 \ 1]^T = \lambda \cdot [1 \ 0 \ 1]^T$

$$A \cdot x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \lambda \cdot x = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$