

Alumn@	Profesor
--------	----------

Ejercicio 1 (1.50 p)			Ejercicio 2 (1.50 p)			Ejercicio 3 (1.50 p)			Ejercicio 4 (1.50 p)		NOTA
			a) 0.50p	b) 0.50p	c) 0.50 p	a) 0.25p	b) 0.50p	c)0.75p	a) 1.00p	b) 0.50p	
Ejercicio 5 (0.50 p)			Ejercicio 6 (1.25 p)			Ejercicio 7 (2.25 p)					
a) 0.10p	b) 0.20p	c) 0.20p	a) 0.25p	b) 0.50p	c) 0.50p	a) 0.50p	b) 0.75p	c) 1.00p			

**Ejercicio 1 (1.50 puntos).** Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. Además, conoce que ambos aviones llevan el mismo tipo de cohete, el de combate 6 y el bombardero 2; que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo y que existe el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base.

Estudia si con la información que dispone el agente es posible determinar el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo. En caso afirmativo indica cuántos hay de cada tipo y en caso contrario explica por qué no.

**SOLUCIÓN**

**Consideramos:**

**C = número de aviones de combate; B = número de aviones bombarderos**

La representación de las condiciones da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} C + B = 60 \\ 6C + 2B = 250 \\ C - 2B = 0 \end{array} \right\}$$

**Planteamiento matricial del sistema:**

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 6 & 2 & 250 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right|$$

**Resolución por Gauss-Jordan:**

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 6 & 2 & 250 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ F2 \leftarrow F2 - 6F1 \\ F3 \leftarrow F3 - F1 \end{array} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -110 \\ 0 & -3 & -60 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ F2 \leftarrow -1/4 F2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 55/2 \\ 0 & -3 & -60 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ F3 \leftarrow F3 + 3F2 \end{array} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 55/2 \\ 0 & 0 & 45/2 \end{array} \right|$$

Como se ha llegado a una fila del tipo  $[0 \ 0 \dots | b]$  con  $b \neq 0$ , el sistema es **INCOMPATIBLE**, por lo que **NO** es posible calcular el número de aviones de combate y bombarderos según la información proporcionada

Alumn@	Profesor
--------	----------

por el agente.

**NOTA:** Si se despeja directamente,

$$C - 2B = 0 \Rightarrow C = 2B$$

$$C + B = 60 \Rightarrow 2B + B = 60 \Rightarrow 3B = 60 \Rightarrow B = 20, \text{ y en consecuencia } C = 40$$

$$\text{Pero } 6C + 2B = 250 \Rightarrow 6 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 280 \neq 250$$

por lo que **NO** es posible cumplir **TODAS** las condiciones indicadas por el agente.

**Ejercicio 2 (1.50 puntos).** Sea A una matriz cuadrada nxn invertible y b un vector columna de orden nx1.

- [0.50p]** Si tenemos la expresión  $A \cdot j = b$ , ¿cuánto vale j?
- [0.50p]** ¿Sería posible encontrar una matriz no cuadrada B tal que  $A \cdot B = B \cdot A$ ? Justifica tu respuesta.
- [0.50p]** ¿Se puede afirmar que A puede escribirse como producto de matrices elementales? ¿Y B? Justifica tus respuestas.

**SOLUCIÓN**

**(a) Como A es invertible, existe  $A^{-1}$  de forma que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$**

De esta forma, si multiplicamos  $A^{-1}$  a ambos lados de la expresión  $A \cdot j = b$ , tenemos que:

$$A^{-1} \cdot A \cdot j = A^{-1} \cdot b, \text{ de donde } j = A^{-1} \cdot b$$

**(b) No.  $A(n \times n)$ , Si B no es cuadrada, para que  $A \cdot B$  sea posible, B debe ser de orden  $(n \times m)$ . Con esto  $A \cdot B$  es de orden  $(n \times m)$ . El producto  $B \cdot A$  no sería posible pues  $B \cdot A$  sería  $(n \times m)(n \times n)$  y  $m \neq n$ .**

**(c) Cualquier matriz cuadrada invertible se puede escribir como producto de matrices elementales ya que se puede reducir a la matriz identidad aplicando operaciones elementales es decir  $(E_m \cdot E_{m-1} \dots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I) \rightarrow E_m \cdot E_{m-1} \dots E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$ .  $\rightarrow$  al ser  $E_i$  invertible,  $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \dots E_{m-1}^{-1} \cdot E_m^{-1}$ . (Teorema 2.6.3 pág. 147 Libro Grossmann).**

**En el caso de B no porque una matriz no cuadrada no es invertible.**

**Ejercicio 3 (1.50 puntos).** Dado el vector  $v_{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  expresado en la base  $B1: \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ , se pide:

- [0.25p]** Calcula las coordenadas de dicho vector en la base canónica.
- [0.50p]** Calcula las coordenadas de dicho vector en la base  $B2: \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- [0.75p]** Encuentra la matriz de cambio de base de B1 a B2.

**SOLUCIÓN**

**(a)  $C_{B1 \rightarrow E} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  ;  $v_E = C_{B1 \rightarrow E} v_{B1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$**

**(b)  $C_{B2 \rightarrow E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $C_{E \rightarrow B2} = C_{B2 \rightarrow E}^{-1}$**

**Aplicando el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de  $C_{B2 \rightarrow E}$  se llega al resultado:**

Alumn@	Profesor
--------	----------

$$C_{E \rightarrow B2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto  $v_{B2} = C_{E \rightarrow B2} \cdot v_E = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c)  $C_{B1 \rightarrow B2} = C_{E \rightarrow B2} \cdot C_{B1 \rightarrow E} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 10 & -14 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 (1.50 puntos). Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) [1.00p] Obtén su polinomio característico y calcula sus autovalores (valores característicos), indicando la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos.
- (b) [0.50p] Se sabe que uno de los autovalores es 0. ¿Podría haberse deducido de la matriz A sin tener que calcular el polinomio característico? Justifica tu respuesta.

**SOLUCIÓN**

(a)

$$\begin{aligned} q_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= [(3 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) + 4 - 2] - [(-1)(1 - \lambda)4 + 2(3 - \lambda) - \lambda] \\ &= [(3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) + 2] - [4\lambda - 4 + 6 - 2\lambda - \lambda] \\ &= [3\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^3 + \lambda^2 + 2] - [\lambda + 2] \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda - 2 \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda - 2 \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$q_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$q_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0$  o sea los autovalores son  $\lambda = 0, \lambda = 2$  (el primero con multiplicidad algebraica 1 y el segundo con multiplicidad 2).

(b) En efecto, se sabe porque la matriz A no es invertible (observar que la tercera fila es la suma de las otras dos). Por lo tanto  $\det(A)=0=\det(A-\lambda I)$  con  $\lambda = 0$ .

Otra forma de verlo es darse cuenta de que el sistema homogéneo  $Ax=0$  tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 5 (0.50 puntos). Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

Sea R un razonamiento de la lógica de proposiciones con n premisas  $P_i$  y conclusión Q /  $R : P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$

- (a) [0.10p] "Es suficiente que una de las premisas de R sea una tautología para que R sea correcto."  
Falso. Si la conclusión Q es falsa para que R sea correcto la conjunción de las premisas tiene que ser falsa.

Alumn@	Profesor
--------	----------

- (b) **[0.20p]** "El razonamiento R es correcto si y sólo si la fórmula  $P_1 \wedge P_2 \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  es una tautología"  
**Cierto. Si) Si la fórmula es una tautología, no existe una interpretación que haga  $P_1 \wedge P_2 \dots \wedge P_n$  cierta y Q falsa, luego R es correcto por definición.**

**Sólo si) Si R es correcto, no se pueden interpretar las premisas como ciertas y Q falsa, luego la fórmula siempre se interpreta como verdadera siempre y en consecuencia es una tautología.**

- (c) **[0.20p]** "Para que una fórmula proposicional sea una contradicción es necesario que tenga, al menos, una interpretación contramodelo"

**Cierto. Si no tiene ninguna interpretación contramodelo no puede ser una contradicción.**

**Ejercicio 6 (1.25 puntos).** Formaliza con el lenguaje de proposiciones los siguientes enunciados declarativos. Para la formalización especifica la variable proposicional con la que simbolizarás cada proposición atómica distinta.

- (a) **[0.25p]** "Roni es jugador del Hércules y Missi del Betis"

<b>Variables proposicionales:</b> hro: Roni es jugador del Hércules bmi: Missi es jugador del Betis	<b>Fbf:</b>  $hro \wedge bmi$
---	-------------------------------------

- (b) **[0.50p]** "O el Betis gana, aunque juegue Roni, o no gana a menos que juegue Missi"

<b>Variables proposicionales:</b> bg: El Betis gana; jro: juega Roni jmi: juega Missi	<b>Fbf:</b>  $(bg \wedge jro) \vee (bg \rightarrow jmi)$
---	--

- (c) **[0.50p]** "Sólo si Roni no juega, el Hércules no gana, aunque es necesario que juegue Missi para que el Betis pierda (no gane)"

<b>Variables proposicionales:</b> hg: Hércules gana	<b>Fbf:</b>  $(\neg hg \rightarrow \neg jro) \wedge (\neg bg \rightarrow jmi)$
--	--

Alumn@	Profesor
--------	----------

**Ejercicio 7 (2.25 puntos).** Demuestra la validez de los siguientes razonamientos de la lógica de proposiciones por los métodos que se indican:

Razonamiento 1) **[0.50p]** Tabla de verdad

$$q \rightarrow \neg p, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow \neg q$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	P1: $q \rightarrow \neg p$	P2: $q \rightarrow r$	Q: $p \rightarrow \neg q$
V	V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

**En todas las interpretaciones (filas 3,4,5,7,8) en las que las premisas son ciertas la conclusión también lo es luego el razonamiento 1 es válido.**

Razonamiento 2) **[0.75p]** Método del contraejemplo. Explica en qué consiste el método.

$$\neg p \wedge q, \neg p \rightarrow e \wedge \neg r, q \wedge \neg r \rightarrow \neg s \Rightarrow s \wedge e$$

					P1	P2	P3	Q
p	q	e	R	s	$\neg p \wedge q$	$\neg p \rightarrow e \wedge \neg r$	$q \wedge \neg r \rightarrow \neg s$	$s \wedge e$
<b>SUPONEMOS RAZONAMIENTO NO VÁLIDO: premisas V y conclusion F</b>								
					V	V	V	F
F	V				Por ser P1 = V			
		V	F		Por ser P2 = V			
				F	Por ser P3 = V			
F	V	V	F	F	<b>CONTRAEJEMPLO → R NO VÁLIDO</b>			

Alumn@	Profesor
--------	----------

Razonamiento 3) [1.00p] Deducción natural. Indica la estrategia que utilizas.

$$\neg(s \rightarrow \neg t), \quad w \rightarrow \neg s \vee \neg t \quad \Rightarrow \quad \neg w$$

**Reducción al absurdo. Suponemos  $\neg Q = \neg w = w$  y llegamos a una contradicción**

-1 $\neg(s \rightarrow \neg t)$	
-2 $w \rightarrow \neg s \vee \neg t$	
3 $w$	<b>Supuesto 1</b>
4 $\neg s \vee \neg t$	<b>MP, 2, 3</b>
5 $\neg(\neg s \vee \neg t)$	<b>DIV, 1</b>
6 $(\neg s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg s \vee \neg t)$	<b>IC, 4, 5, cierre supuesto 1</b>
7 $\neg w$	<b>IN, 3-6 ó Abs, 3-6</b>

**Otra alternativa:**

-1 $\neg(s \rightarrow \neg t)$	
-2 $w \rightarrow \neg s \vee \neg t$	
3 $w$	<b>Supuesto 1</b>
4 $\neg s \vee \neg t$	<b>MP, 2, 3</b>
5 $\neg(\neg s \vee \neg t)$	<b>DIV, 1</b>
6 $\neg\neg s \wedge \neg\neg t$	<b>M<math>\wedge</math>, 5</b>
7 $s \wedge t$	<b>EN, 6</b>
8 $s$	<b>EC, 7</b>
9 $t$	<b>EC, 7</b>
10 $\neg t$	<b>SD, 4, 8</b>
11 $t \wedge \neg t$	<b>IC, 9, 10, cierre supuesto 1</b>
12 $\neg w$	<b>IN, 3-11. ó Abs. 3-11</b>