EJERCICIOS DE LÓGICA (4 puntos)

[1.50p] **Ejercicio 1.** En la guía docente de la asignatura Matemáticas I (M1) se encuentran establecidas las condiciones generales de evaluación para la convocatoria de enero del curso 2021/22. Carlos, un estudiante "avezado" de la parte de Lógica, las interpreta así:

- **C_1**: Carlos aprueba M1 en enero sólo si supera la Teoría, las Prácticas, y tiene como mínimo un 5 en la nota final de la asignatura.
- **C_2**: Para que Carlos supere la Teoría es necesario que obtenga como mínimo un 4 en el examen final, pero no es necesario que haga todos los cuestionarios de clase.
- **C_3**: Carlos no supera las Prácticas a menos que consiga como mínimo un 4 en los mapas de PLMan aunque no asista a todas las sesiones síncronas.
- **C_4**: No es suficiente que Carlos haya hecho todos los cuestionarios de clase para sacar como mínimo un 4 en el examen final de Teoría.
- **C_5**: O Carlos no ha asistido a todas las sesiones síncronas o no ha obtenido como mínimo un 4 en los mapas de PLMan.

Formaliza las sentencias C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 empleando el marco conceptual **MC**:

MC={ **a**: "Carlos aprueba M1 en enero";

c: "Carlos hace todos los cuestionarios de clase";

m4t: "Carlos obtiene un mínimo de 4 en el examen final de Teoría";

m4p: "Carlos consigue un mínimo de 4 en los mapas de PLMan";

m5: "Carlos obtiene un mínimo de 5 en la nota final de la asignatura";

p: "Carlos supera las prácticas"; **t**: "Carlos supera la teoría";

s: "Carlos asiste a todas las sesiones síncronas." }

SOLUCIÓN

Fbf-C1: $a \rightarrow t \land p \land m5$

Fbf-C2: $(t \rightarrow m4t) \land \neg(t \rightarrow c)$

Fbf-C3: $p \rightarrow m4p \land \neg s$

Fbf-C4: $\neg(c \rightarrow m4t)$

Fbf-C5: $\neg s \lor \neg m4p$

[1.50p] **Ejercicio 2**.

2.1. (0.25p) La conclusión de un argumento es

$Q : A \vee \neg(B \wedge \neg B)$

¿Podemos afirmar que el argumento es correcto? Justifica tu respuesta.

2.2. (1.25p) Demuestra la validez del siguiente argumento por **deducción natural**:

$P_1 : \neg(\neg B \wedge A)$

$P_2 : C \to D$

$P_3 : A \vee C$ $\qquad\qquad Q : B \vee D$

SOLUCIÓN

2.1. El argumento sería correcto independientemente de las premisas, pues la conclusión es una tautología, ya que por equivalencias:

A v ¬(B ∧ ¬B) = A v (¬B v B) = A v V = V

Por tanto, el argumento sería correcto porque no se podría dar ninguna interpretación en la que las premisas fueran verdaderas y la conclusión falsa.

2.2

- 1	¬(¬B ∧ A)	
- 2	C → D	
- 3	A v C	**Q: B v D**
4	¬(B v D)	Supuesto
5	¬B ∧ ¬D	DM∧, 4
6	¬B	EC, 5
7	¬¬B v ¬A	DMv, 1
8	B v ¬A	EN, 7
9	¬A	SD, 6, 8
10	C	SD, 3, 9
11	D	MP, 2, 10
12	¬D	EC, 5
13	D ∧ ¬D	IC, 11, 12
14	¬¬(B v D)	Abs, 4-13
15	B v D	EN, 14

Por la estrategia de Reducción al Absurdo, queda demostrada la validez del argumento

4	A	Supuesto
5	¬¬B v ¬A	DMv, 1
6	B v ¬A	EN, 7
7	B	SD, 4, 6
8	B v D	ID, 7
9	C	Supuesto
10	D	MP, 2, 9
11	B v D	ID, 10
12	B v D	Cas, 3, 4-8, 9-11

Por la estrategia de Prueba por Casos, también queda demostrada la validez del argumento

[1.00p] **Ejercicio 3.**

3.1. (0.50p) Estudia la validez del siguiente argumento por el método de la **Tabla de Verdad.** Explica el resultado.

$P_1 : A \to B \wedge \neg C$
$P_2 : \ B \leftrightarrow A \vee C$
$Q : \ \neg A \wedge \neg C$

3.2. (0.50p) Demuestra la validez del siguiente argumento por el método del **Contraejemplo**. Explica los pasos que realices y el resultado.

$P_1 : \neg B \to \neg A$
$P_2 : C \to A \wedge \neg D$
$P_3 : E \to D$
$P_4 : C$
$Q : B \vee \neg E$

SOLUCIÓN

3.1.

A	B	C	¬A	¬C	B ∧ ¬C	A v C	¬A ∧ ¬C	P1: A → B ∧ ¬C	P2: B ↔ A v C	Q: ¬A ∧ ¬C
V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	F	V	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

A la vista de la tabla obtenida, se observa que existen 2 interpretaciones (filas 2 y 5) en las que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, aunque en la fila 8 se da una interpretación en que las premisas son ciertas y la conclusión también.
Fila 2, {A=V, B=V, C=F} y Fila 5 {A=F, B=V, C=V}

Por tanto, el argumento NO es correcto, porque al menos existe una interpretación de las variables A, B y C para las que las premisas son verdaderas pero la conclusión no.

3.2.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>P1: ¬B → ¬A</th><th>P2: C → A ∧ ¬D</th><th>P3: E → D</th><th>P4: C</th><th>Q: B v ¬E</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td colspan="10">El método del contraejemplo parte de premisas verdaderas y conclusión falsa.
Si empleando este supuesto llegamos a una contradicción, esta situación no se podrá dar, con lo que el argumento será correcto.
Si por el contrario, llegamos a una interpretación que permite este resultado, esa interpretación será un contraejemplo del argumento y por consiguiente éste no será correcto.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>B=F, E=V</td></tr>
<tr><td colspan="10">Para que la conclusión sea F, B=F, E=V</td></tr>
<tr><td></td><td>F</td><td></td><td></td><td>V</td><td></td><td></td><td></td><td>C=V</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Para que P3=V, obligatoriamente C=V</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>V</td><td></td><td></td><td>Como B=F,
¬B=V entonces
¬A=V, A=F</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Para que P1=V, como B=F, A=F</td></tr>
<tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Como C=V, A=F
entonces
independientemente
del valor de D, P2=F
CONTRADICCIÓN</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

De esta forma, partiendo de premisas verdaderas y conclusión falsa, se ha llegado a una contradicción, por lo que el argumento es correcto.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA (6 puntos)

`[1.50p]` **Ejercicio 4**.

4.1. `(0.50p)` Supón que M_1 es la matriz ampliada del sistema $Ax = b$. Para resolver el sistema, aplicamos *Gauss* sobre M_1. Al observar la *matriz escalonada*, deducimos que el sistema es *incompatible*. ¿Qué hemos debido ver para saberlo?

4.2. `(0.50p)` M_2 es otra matriz ampliada que hemos escalonado por *Gauss*. Sabiendo que el sistema original de M_2 es compatible. ¿Qué sabemos sobre los valores a_1, a_2 y a_3?

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

4.3. `(0.50p)` Elige 3 valores reales para a_1, a_2 y a_3 y calcula la solución al sistema que representa M_2.

SOLUCIÓN

4.1. Un sistema Ax = b es incompatible sólo si su matriz ampliada es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada o escalonada reducida por filas en la cual hay, al menos, una fila en la que los primeros n elementos son cero y el elemento n + 1, es 1 (o cualquier valor distinto de cero).

4.2. Para que el SEL asociado a la matriz ampliada [A I b] sea compatible, el parámetro a_3 debe ser igual de cero. Los parámetros a_1 y a_2 pueden ser cualquier valor real.

4.3. Por ejemplo, $a_1=a_2=a_3=0$

Así,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se consigue que M2 sea escalonada reducida aplicando $F_3 \leftarrow (½)F_3$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta forma, se trata de un sistema compatible indeterminado con 1 parámetro, x_4, correspondiente a la columna que no tiene 1 principal.

Así, el sistema correspondiente a M_2 equivalente al original quedaría:

$x_1 + 2x_4 = -5 \Rightarrow x_1 = -2x_4 - 5$

$x_2 - 3x_4 = 2 \Rightarrow x_2 = 3x_4 + 2$

$x_3 = 0$

El vector solución tendría la estructura:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_4 - 5,\ 3x_4 + 2,\ 0,\ x_4) =$$
$$= x_4(-2, 3, 0, 1) + (-5, 2, 0, 0)$$

`[1.50p]` **Ejercicio 5.**

5.1. `(0.50p)` Explica qué es una matriz elemental E y escribe 3 ejemplos $E_i,\ i = 1, 2, 3$ de tamaño 3x3, obtenidas mediante distintas operaciones por filas. Explica cómo las obtienes.

5.2. `(0.50p)` Para la matriz A calcula los productos $M_i = E_i A,\ i = 1, 2, 3$ siendo E_i matrices 3x3 obtenidas a partir de estas operaciones por filas:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_1 : F_3 \leftarrow F_3 + (-4)F_1 \\ E_2 : F_2 \leftrightarrow F_3 \\ E_3 : F_3 \leftarrow 5F_3 \end{array}$$

Indica el valor de cada E_i.

5.3. `(0.50p)` Dada
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$
determina si es invertible y, si es el caso, escribe A^{-1} como producto de matrices elementales.

SOLUCIÓN

5.1. Una matriz elemental es una matriz E (nxn) obtenida a partir de efectuar una operación elemental sobre una fila en la matriz identidad I_n

Por ejemplo, para I_3:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_1 : F_2 \leftrightarrow F_3$ a I_3

$$E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_2 : F_1 \leftarrow 2F_1$ a I_3

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_3 : F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$ a I_3

5.2.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_1 : F_3 \leftarrow F_3 + (-4)F_1$ a I_3

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_2 : F_2 \leftrightarrow F_3$ a I_3

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $E_3 : F_3 \leftarrow 5F_3$ a I_3

Así,

$$M_1 = E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4b & i-4c \end{bmatrix}$$

$$M_2 = E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$M_3 = E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}$$

5.3. Para comprobar si A es invertible se calcula la reducida de la matriz ampliada [A | I] y si se obtiene [B | C] tal que B = I, entonces C será A^{-1}.

En el proceso, se guardan las operaciones elementales por fila ap licadas a la matriz [A I] en matrices elementales E_i.

$$M_1 = [A \quad I] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/8 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando a M_1 la operación elemental $F_1 \leftarrow 1/8F_1$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & -5/8 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando a M_2 la operación elemental $F_2 \leftarrow F_2 + (-5)F_1$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 4 \end{bmatrix}$$ aplicando a M_3 la operación elemental $F_2 \leftarrow 4F_2$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5/2 & 4 \end{bmatrix}$$ aplicando a M_4 la operación elemental $F_1 \leftarrow F_1 + (-3/4)F_2$

De esta forma, para escribir A^{-1} como producto de matrices elementales:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $F_1 \leftarrow 1/8F_1$ a I_2

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $F_2 \leftarrow F_2 + (-5)F_1$ a I_2

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $F_2 \leftarrow 4F_2$ a I_2

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ por aplicación de la operación elemental $F_1 \leftarrow F_1 + (-3/4)F_2$ a I_2

Y entonces, se escribe A^{-1} como producto de matrices elementales de la siguiente forma:

$$A^{-1} = E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

[1.50p] **Ejercicio 6**.

6.1. (0.50p) Dado

$$S = \{(a, b, a - b) \,/\, a, b\} \in \mathbb{R}^3$$

Demuestra que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Obtén una base (compruébalo) y su dimensión.

6.2. (1.00p) Sea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén la base y dimensión de los subespacios **Fila**, **Columna** y **Nulo** de A.

SOLUCIÓN

6.1.

- Para que S sea subespacio vectorial de R^3, debe cumplir las siguientes propiedades:
  - El vector nulo pertenece a S, $0 \in S$
  - $\alpha u \in S,\ \forall u \in S,\ \alpha \in R$
  - $u + v \in S,\ \forall u, v \in S$

a) $(0, 0, 0) \in S$ ya que si $a = b = 0,\ (0, 0, 0 - 0) \in S$, luego el vector nulo pertenece a S

b) Sea $u = (a, b, a - b) \in S$, hay que demostrar que $\alpha u \in S$

$$\alpha u = \alpha(a, b, a - b) = (\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha(a - b)) = (\alpha a,\ \alpha b,\ \alpha a - \alpha b) \in S$$

Por tanto, queda demostrado tomando $a = \alpha a,\ b = \alpha b$.

c) Sea $u = (a_1, b_1, a_1 - b_1),\ v = (a_2, b_2, a_2 - b_2) \in S$, hay que demostrar que $u + v \in S$

$$u + v = (a_1, b_1, a_1 - b_1) + (a_2, b_2, a_2 - b_2) =$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)) =$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)) \in S$$

Por tanto, queda demostrado tomando $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$

Por tanto, S es subespacio vectorial de R^3.

- Para obtener una base de S, los vectores de S tienen la estructura $(a,\ b,\ a-b)$, es decir, $a(1,0,1)+b(0,1,-1)$
  Así, hay que demostrar que los vectores $(1,0,1)\ y\ (0,1,-1)$ forman una base de S.
  Para ello hay que ver que son Linealmente Independientes y además son sistema generador.

  Son Linealmente Independientes porque ninguno se puede poner como combinación lineal del otro.
  Para ver si son sistema generador hay que comprobar que cualquier vector se puede poner como combinación lineal de ambos. Se cumple por definición.
  Por tanto, $Env(S) = \{(1,0,1),\ (0,1,-1)\} = \{(a,b,a-b)\ /a,b\ \in R\}$

- La dimensión del subespacio es 2, pues la base está formada por 2 vectores.

6.2.

- Espacio Fila

Las filas de A consideradas como 3 vectores de R^2 generan un subespacio de R^2 llamado Subespacio fila de A (Fil A).
Una base de Fil A está formada por las filas de A que en la reducida tiene 1's principales.

Por tanto, hay que obtener la reducida de A:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$ aplicando $F_1 \leftarrow (-1/3)F_1$

$$A1=\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$ aplicando $F_2 \leftarrow F_2+(-3)F_1$, $F_3 \leftarrow F_3+F_1$

$$A2=\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 1\\ 0 & 2/3\end{bmatrix}$$ aplicando $F_3 \leftarrow F_3+(-2/3)F_2$

$$A3=\begin{bmatrix}1 & -1/3\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$ aplicando $F_1 \leftarrow F_1+1/3F_2$

$$A4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = rref(A)$$

Por tanto, las filas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las filas 1 y 2.
Así, $Fil\,A\; =\; Env\{(-3,1),(3,-2)\}$ y $Dim\,Fil\,A\; =\; 2$

- Espacio Columna

Las columnas de A consideradas como 2 vectores de R^3 generan un subespacio de R^3 llamado Subespacio columna de A (Col A).
Una base de Col A está formada por las columnas de A que en la reducida tiene 1's principales.

Del resultado de rref(A) obtenido anteriormente, se deduce que las columnas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las columnas 1 y 2.
Así, $Col\,A\; =\; Env\{(-3,3,-1),(1,-2,1)\}$ y $Dim\,Col\,A\; =\; 2$

- Espacio Nulo

El subespacio Nulo de A coincide con el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo Ax=0.

Del resultado de rref(A) obtenido anteriormente, x_1=0 y x_2=0 (el sistema únicamente tiene la solución trivial).
Así, $Nul\,A\; =\; Env\{(0,0)\}$ y $Dim\,Nul\,A\; =\; 1$

[1.50p] **Ejercicio 7**. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & p & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & q & -1 \end{bmatrix}$$

7.1. (0.25p) Determina los valores de p y q para los que A es simétrica.

7.2. (0.50p) Con los p y q calculados, comprueba que A tiene 2 valores propios y calcula sus multiplicidades algebraicas.

7.3. (0.75p) Para cada valor propio, obtén un vector propio asociado y comprueba el resultado.

SOLUCIÓN

7.1. Para que A sea simétrica, **p = −1** y **q = −2** , y así:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

7.2. Para calcular los valores propios de A, primero hay que obtener el polinomio característico:

$$\mathbf{q_A(\lambda) = | A - \lambda I |}$$

$$q_A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)-4-4-4(2-\lambda)-4(2-\lambda)-(-1-\lambda) =$
$= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) -8 -8 +4\lambda -8 +4\lambda +1 +\lambda =$
$= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) -23 + 9\lambda =$
$= (4-4\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda) -23 + 9\lambda =$
$= (-4+3\lambda^2-\lambda^3) -23 +9\lambda = -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27$

Aplicando la regla de Ruffini al polinomio resultante se obtienen sus raíces, que se corresponden con los valores propios de A:

```
      |   -1    3    9    -27
3     |        -3    0     27
        -----------------
          -1    0    9     0
```

Por tanto, una raíz del polinomio es 3 y queda como resto $-\lambda^2+9$
Resolviendo $-\lambda^2+9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$

Así $\mathbf{q_A(\lambda) = | A - \lambda I | = -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27 = (3-\lambda)^2(3+\lambda)}$
Por tanto, los valores propios son:

- $\lambda_1 = -3$, con multiplicidad algebraica 1 (**ma(-3)=1**)
- $\lambda_2 = 3$, con multiplicidad algebraica 2 (**ma(3)=2**)

Se verifican las propiedades de traza y determinante de A, pues

- $tr(A) = 2+2-2 = 3$, y la suma de los valores propios es $3+3-3 = 3$
- $det(A) = -27$, y el producto de los valores propios es $3 \cdot 3 \cdot (-3) = -27$

7.3.

- Para $\lambda_1 = -3$, se resuelve el sistema homogéneo $[\ A - \lambda I\ ]x = 0$
  Así, $[\ A - -3I\ ] = [\ A + 3I\ ]$
  Por tanto, se resuelve el sistema $[\ A + 3I\ ]x = 0$

$$[\ A + 3I\ ]x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema se obtiene la reducida de **A+3I** por Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1=F2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1=(-1)F1} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ F2=F2-5F1 \\ F3=F3+2F1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F2=(1/24)F2} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F3=F3-12F2} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1=F1+5F2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– 2 unos principales, 1 parámetro (x_3) -

Por tanto, la solución del sistema viene dada por las ecuaciones:

$x_1 - 1/2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2x_3$

$x_2 - 1/2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2x_3$

De esta forma, los vectores solución del sistema tienen la forma:

$(1/2x_3\ ,\ 1/2x_3\ ,\ x_3) = x_3(1/2\ ,\ 1/2\ ,\ 1)$

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = -3$ **es:**

$E_A(\lambda_1) = Env\{(1/2, 1/2, 1)\}$

Un vector propio asociado a $\lambda_1 = -3$ sería $u = (1, 1, 2)$

Para comprobarlo, hay que ver si se cumple que $A \cdot u = \lambda \cdot u$

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot u = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Por tanto, queda comprobado el resultado.

- Para $\lambda_2 = 3$, se resuelve el sistema homogéneo $[\ A - \lambda I\ ]x = 0$
  Así, $[\ A - 3I\ ] = [\ A - 3I\ ]$
  Por tanto, se resuelve el sistema $[\ A - 3I\ ]x = 0$

$$[\ A - 3I\ ]x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema se obtiene la reducida de **A-3I** por Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1=(-1)F1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ F2=F2-F1 \\ F3=F3+2F1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– 1 uno principal, 2 parámetros (x_2,x_3) -

Por tanto, la solución del sistema viene dada por la ecuación:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_3$$

De esta forma, los vectores solución del sistema tienen la forma

$$(\ -x_2 - 2x_3,\ x_2\ ,\ x_3\ ) = x_2(-1,1,0) + x_3(-2,0,1)$$

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 3$ **es:**

$$E_A(\lambda_2) = Env\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$$

Un vector propio asociado a $\lambda_2=3$ sería $v= (1,1,-1) = 1(-1,1,0)+(-1)(-2,0,1)$

Para comprobarlo, hay que ver si se cumple que $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot u = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, queda comprobado el resultado.