

Alumn@	Profesor
DNI	

Ejercicio 1 (1.50 p)	Ejercicio 2 (1.50 p)	Ejercicio 3 (1.00 p)	Ejercicio 4 (1.50 p)	NOTA
Ejercicio 5 (1.50 p)	Ejercicio 6 (1.50 p)	Ejercicio 7 (1.50 p)		

EJERCICIOS DE LÓGICA (4 puntos)

[1 . 50p] **Ejercicio 1.** La formación tardía en lógica matemática afecta al desarrollo de las habilidades matemáticas y a las relaciones en sociedad de tal forma que todo el que no tenga conocimientos lógicos no tiene ninguna posibilidad de superar cualquier conflicto.

Con esto... ¿Cómo estás de lógica? Resuelve los siguientes retos y valora tu nivel.

- P_1 : Tu lógica está a tope o a medio gas.
- P_2 : Tu lógica está a tope sólo si no cometes errores en los ejercicios lógicos, eres colega de PlMan y resuelves sus mapas.
- P_3 : Es suficiente que seas colega de PlMan para que cometas errores en los ejercicios lógicos.
- P_4 : Por otro lado, no resolverás los mapas de PlMan a menos que seas su colega, pero si no cometes errores en los ejercicios lógicos o no eres su colega o no resuelves los mapas, tu lógica estará a medio gas.
- P_5 : A menos que tu lógica no esté a tope, no estará a medio gas.

Formaliza las sentencias P_1 , P_2 , P_3 , P_4 y P_5 empleando el marco conceptual **MC**:

MC={ to: "tu lógica está a tope";
 mg: "tu lógica está a medio gas";
 erj: "cometes errores en los ejercicios lógicos";
 col: "eres colega de Plman";
 rm: "resuelves mapas" }

SOLUCIÓN

Fbf-P1: to v mg
 Fbf-P2: to \rightarrow \neg erj \wedge col \wedge rm
 Fbf-P3: col \rightarrow erj
 Fbf-P4: (rm \rightarrow col) \wedge (\neg erj v \neg col v \neg rm \rightarrow mg)
 Fbf-P5: mg \rightarrow \neg to

[1 .50p] **Ejercicio 2.**

2.1. (0.25p) Explica por qué un argumento que considere las siguientes premisas y cualquier fórmula lógica como conclusión, por ejemplo, D , siempre es un argumento correcto.

$$P_1 : A \vee \neg B; P_2 : \neg A \wedge B; P_3 : C \rightarrow C \implies Q : D$$

2.2. (1.25p) Demuestra la validez del siguiente argumento por **deducción natural**:

$$P_1 : \neg A \rightarrow B$$

$$P_2 : B \rightarrow C \wedge D \wedge \neg E$$

$$P_3 : \neg D \vee F$$

$$P_4 : \neg F$$

$$Q : A$$

SOLUCIÓN

2.1. El argumento sería correcto para esa conclusión y para cualquier otra, dado que hay una contradicción en las premisas P_1 y P_2 . Así, las premisas siempre son falsas. Por tanto, el argumento sería correcto para cualquier conclusión, porque no se podría dar ninguna interpretación en la que las premisas fueran verdaderas y la conclusión falsa.

2.2	- 1	$\neg A \rightarrow B$	
	- 2	$B \rightarrow C \wedge D \wedge \neg E$	
	- 3	$\neg D \vee F$	
	- 4	$\neg F$	Q: A
	5	$\neg A$	Supuesto
	6	B	MP, 1, 5
	7	$C \wedge D \wedge \neg E$	MP, 2, 6
	8	D	EC, 7
	9	$\neg D$	SD, 3, 4
	10	$D \wedge \neg D$	IC, 8, 9
	11	$\neg \neg A$	Abs, 5-10
	12	A	EN, 11

Por la estrategia de Reducción al Absurdo, queda demostrada la validez del argumento

Alumn@	Profesor
DNI	

[1.00p] **Ejercicio 3.**

3.1. (0.50p) Estudia la validez del siguiente argumento por el método de la **Tabla de Verdad**. Explica el resultado.

$$P_1 : B \rightarrow C \wedge \neg A$$

$$P_2 : \neg B \vee C \leftrightarrow A$$

$$Q : A \vee \neg C$$

3.2. (0.50p) Demuestra la validez del siguiente argumento por el método del **Contraejemplo**. Explica los pasos que realices y el resultado.

$$P_1 : \neg A \vee \neg B$$

$$P_2 : C \rightarrow A \wedge \neg D$$

$$P_3 : \neg D \rightarrow \neg E$$

$$P_4 : \neg C$$

$$Q : \neg B \vee \neg E$$

SOLUCIÓN

3.1.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$C \wedge \neg A$	$\neg B \vee C$	P1: $B \rightarrow C \wedge \neg A$	P2: $\neg B \vee C \leftrightarrow A$	Q: $A \vee \neg C$
V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V

A la vista de la tabla de verdad obtenida, se observa que sólo existen 2 interpretaciones (filas 3 y 4) en las que las premisas son verdaderas y en ambos casos la conclusión es verdadera.

Por tanto, el argumento es correcto, porque siempre que las premisas P1 y P2 son verdaderas, la conclusión también lo es.

3.2.

A	B	C	D	E	P1: $\neg A \vee \neg B$	P2: $C \rightarrow A \wedge \neg D$	P3: $\neg D \rightarrow \neg E$	P4: $\neg C$	Q: $\neg B \vee \neg E$
					V	V	V	V	F
<p>El método del contraejemplo parte de premisas verdaderas y conclusión falsa. Si empleando este supuesto llegamos a una contradicción, esta situación no se podrá dar, con lo que el argumento será correcto. Si por el contrario, llegamos a una interpretación que permite este resultado, esa interpretación será un contraejemplo del argumento y por consiguiente éste no será correcto.</p>									
									B=V, E=V
Para que la conclusión sea F, B=V, E=V									
	V			V				C=V	
Para que P4=V, obligatoriamente C=F									
		F							
Para que P3=V, como E=V, $\neg E=F$, entonces D=V									
			V						
Para que P2=V, como C=F y D=V, no se necesita ningún valor obligatorio de A									
Para que P1=V, como B=V, entonces A tiene que ser F									
F									
<p>Por tanto, la interpretación { A=F; B=V; C=F; D=V; E=V } es un contraejemplo para el argumento, pues con dichos valores de las variables las premisas son verdaderas y la conclusión falsa</p>									

De esta forma, partiendo de premisas verdaderas y conclusión falsa, se ha llegado a una interpretación contraejemplo, por lo que el argumento NO es correcto.

Alumn@ DNI	Profesor
---------------	----------

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA (6 puntos)

[1.50p] **Ejercicio 4.**

4.1. (0.50p) Sea M_1 la matriz ampliada del sistema $Ax = b$. Para resolver el sistema hemos aplicado *Gauss* y al obtener una *matriz escalonada* de M_1 hemos deducido que el sistema es *compatible indeterminado*. ¿Por qué hemos llegado a esa conclusión?

4.2. (0.50p) Sea M_2 otra matriz ampliada que hemos escalonado por *Gauss*. Sabiendo que el sistema original de M_2 es *incompatible*. ¿Qué podemos afirmar sobre los valores a_1, a_2 y a_3 ?

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

4.3. (0.50p) Decide los valores reales para a_1, a_2 y a_3 para que el sistema que representa M_2 tenga, al menos, una solución. Representa la resolución del sistema con las restricciones expuestas y escribe el vector solución.

SOLUCIÓN

4.1. Un sistema $Ax = b$ es compatible indeterminado sólo si su matriz ampliada es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada o escalonada reducida por filas en la cual:

- no existe ninguna fila del tipo $[0,0,\dots,0 \mid b]$, $b \neq 0$
- el número de 1s principales es menor que el número de incógnitas

4.2. Para que el SEL asociado a la matriz ampliada $[A \mid b]$ sea incompatible, podrían darse dos opciones:

- que el parámetro a_3 sea distinto de cero.
- que los parámetros a_1 y a_2 sean iguales a 0

4.3. Tomamos por ejemplo los valores $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=0$

Así,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con dichos valores, M_2 está escalonada sin necesidad de realizar ninguna operación elemental de fila.

De esta forma, se trata de un sistema compatible indeterminado con 1 parámetro, x_2 , correspondiente a la columna que no tiene 1 principal.

Así, el sistema correspondiente a M_2 equivalente al original quedaría:

$$x_1 - 2x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2x_4 + 2 = 4$$

$$x_3 + 3x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = -3x_4 + 2 = -1$$

$$x_4 = 1$$

El vector solución tendría la estructura:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (4, x_2, -1, 1) = \\ &= x_2(0, 1, 0, 0) + (4, 0, -1, 1) \end{aligned}$$

Alumn@ DNI	Profesor
---------------------------------	-----------------

[1.50p] **Ejercicio 5.**

5.1. (0.50p) Escribe los tres tipos de operaciones por fila que se pueden aplicar a cualquier matriz $A = [a_{ij}] (m \times n)$. Explica cómo se obtiene una matriz elemental E a partir de cada tipo de operación y escribe 1 ejemplo de cada una, $E_i, i = 1, 2, 3$, de tamaño 3×3 .

5.2. (0.50p) Consigue 3 matrices elementales $E_i, i = 1, 2, 3$ de tamaño 3×3 a partir de las siguientes operaciones por filas:

$$\begin{aligned}
 E_1 &: F_3 \leftarrow F_3 + (-2)F_2 \\
 E_2 &: F_1 \leftarrow 3F_1 \\
 E_3 &: F_3 \leftrightarrow F_2
 \end{aligned}$$

5.3. (0.50p) Se supone que para una matriz $A = [a_{ij}] (n \times n)$ y las matrices elementales $E_i, i = 1, 2, 3$ se verifica que $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I (1)$.

A partir de la expresión (1) escribe la expresión algebraica que representan el cálculo de las matrices A y A^{-1} . Explica los pasos que realices.

SOLUCIÓN

5.1.

Para una matriz $A = [a_{ij}] (m \times n)$ los tres tipos de operaciones por fila son:

$$\mathbf{F}_i \leftrightarrow \mathbf{F}_j; \quad \mathbf{F}_i \leftarrow \alpha \mathbf{F}_i; \quad \mathbf{F}_i \leftarrow \mathbf{F}_i + \beta \mathbf{F}_j$$

Una matriz elemental es una matriz $(n \times n)$ (la denotaremos por E) que se consigue a partir de efectuar sólo una operación elemental sobre una fila en la matriz identidad $I (n \times n)$

Por ejemplo, para I_3 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ por aplicación de la operación elemental } \mathbf{F}_3 \leftrightarrow \mathbf{F}_2 \text{ a } I_3$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ por aplicación de la operación elemental } \mathbf{F}_1 \leftarrow 2\mathbf{F}_1 \text{ a } I_3$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ por aplicación de la operación elemental } \mathbf{F}_1 \leftarrow \mathbf{F}_1 + (-2)\mathbf{F}_2 \text{ a } I_3$$

5.2.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

por aplicación de la operación elemental $F_3 \leftarrow F_3 + (-2)F_2$ a I_3

$$E_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por aplicación de la operación elemental $F_1 \leftarrow 3F_1$ a I_3

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por aplicación de la operación elemental $F_3 \leftrightarrow F_2$ a I_3

5.3.

A partir de (1) y teniendo en cuenta que toda matriz elemental tiene inversa obtenemos las expresiones algebraicas con las que se pueden calcular las matrices A y A^{-1} . Luego:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

$$E_3^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_3^{-1} \cdot I \implies E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_3^{-1} \cdot I$$

$$E_2^{-1} \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot I \implies E_1 \cdot A = E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot I$$

$$E_1^{-1} \cdot E_1 \cdot A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot I \implies A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot I$$

Así,
$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$$

También, de la expresión (1) podemos obtener:

$$E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \implies E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$

Así,
$$A^{-1} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$$

Alumn@ DNI	Profesor
---------------------------------	-----------------

[1.50p] **Ejercicio 6.**

6.1. (0.50p) Dado

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 \cdot x_3 = 0\} \in \mathbb{R}^3$$

Demuestra si S es o no un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 . Justifica tu respuesta.

6.2. (1.00p) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Obtén la base y dimensión de los subespacios **Fila**, **Columna** y **Nulo** de A .

6.1.

- Para que S sea subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 , debe cumplir las siguientes propiedades:
 - El vector nulo pertenece a S , $0 \in S$
 - $\alpha u \in S, \forall u \in S, \alpha \in \mathbb{R}$
 - $u + v \in S, \forall u, v \in S$

a) $(0, 0, 0) \in S$ ya que si $x_1 = x_3 = 0$, $x_1 \cdot x_3 = 0$, luego el vector nulo pertenece a S

b) Sea $u = (x_1, x_2, x_3) \in S$, hay que demostrar que $\alpha u \in S$

$$\alpha u = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Hay que demostrar que $\alpha x_1 \cdot \alpha x_3 = 0$

$$\alpha x_1 \cdot \alpha x_3 = \alpha^2 \cdot x_1 \cdot x_3 = \alpha^2 \cdot 0 = 0 \text{ ya que } x_1 \cdot x_3 = 0 \text{ porque } u \in S$$

Por tanto, queda demostrado.

c) Sea $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in S$, hay que demostrar que $u + v \in S$

$$u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Hay que demostrar que $(x_1 + y_1) \cdot (x_3 + y_3) = 0$

$$(x_1 + y_1) \cdot (x_3 + y_3) = x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3 + y_1 \cdot y_3$$

$x_1 \cdot x_3 = 0$ y $y_1 \cdot y_3 = 0$ porque $u, v \in S$. Por tanto,

$$x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3 + y_1 \cdot y_3 = x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3$$

Y no se puede asegurar que dicha suma sea igual a 0, porque por ejemplo, tomando $u = (1, 1, 0), v = (0, 0, 1) \in S$ (ya que en u $1 \cdot 0 = 0$ y en v $0 \cdot 1 = 0$)

Pero $u + v = (1, 1, 1) \notin S$ porque $1 \cdot 1 \neq 0$.

Es decir, se pueden encontrar muchos ejemplos de pares de vectores pertenecientes a S cuya suma no pertenece a S .

Por tanto, S **NO** es subespacio vectorial de R^3 .

6.2.

- Espacio Fila

Las filas de A consideradas como 2 vectores de R^3 generan un subespacio de R^3 llamado Subespacio fila de A (Fil A).

Una base de Fil A está formada por las filas de A que en la reducida tiene 1's principales.

Por tanto, hay que obtener la reducida de A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{aplicando } F_2 \leftarrow (-1/9)F_2$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{aplicando } F_1 \leftarrow F_1 - 7F_2$$

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = rref(A)$$

Por tanto, las filas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las filas 1 y 2.

Así, $Fil A = Env\{(1, -5, 7), (0, 0, -9)\}$ y $Dim Fil A = 2$

- Espacio Columna

Las columnas de A consideradas como 3 vectores de R^2 generan un subespacio de R^2 llamado Subespacio columna de A (Col A).

Una base de Col A está formada por las columnas de A que en la reducida tiene 1's principales.

Del resultado de $rref(A)$ obtenido anteriormente, se deduce que las columnas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las columnas 1 y 3.

Así, $Col A = Env\{(1, 0), (7, -9)\}$ y $Dim Col A = 2$

- Espacio Nulo

El subespacio Nulo de A coincide con el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo $Ax=0$.

Del resultado de $rref(A)$ obtenido anteriormente, $x_1=5x_2$ y $x_3=0$.

Así, las soluciones de $Ax=0$ tendrían la forma $(5x_2, x_2, 0) = x_2(5, 1, 0)$

Así, $Nul A = Env\{(5, 1, 0)\}$ y $Dim Nul A = 1$

Alumn@ DNI	Profesor
---------------------------------	-----------------

[1.50p] **Ejercicio 7.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & a \\ b & c & d \end{bmatrix}$$

7.1. (0.25p) Determina los valores de a , b , c y d para los que A es simétrica y tiene suma constante por filas.

7.2. (0.50p) Teniendo en cuenta dichos valores de a , b , c y d , obtén los valores propios de A y calcula sus multiplicidades algebraicas.

7.3. (0.75p) Elige uno de los valores propios del apartado anterior y calcula un vector propio asociado, comprobando el resultado obtenido.

7.1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & a \\ b & c & d \end{bmatrix}$$

En primer lugar $a = -2$ para que en la 2da fila se mantenga la suma constante por filas (en la 1ra, $3-2=1$).

Después, $b = -2$ y $c = -2$ para que sean simétricas las filas 1 y 2 con sus respectivas columnas.

Y por último, $d = 5$ para mantener la suma constante por filas ($-2-2+5=1$) y la simetría de la 3ra fila (con su respectiva columna).

Así,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

7.2. Para calcular los valores propios de A , primero hay que obtener el polinomio característico:

$$q_{A(\lambda)} = | A - \lambda I |$$

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2)(3-\lambda) - (-2)(-2)(3-\lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= (3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = \\
&= (3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - 24 + 8\lambda = \\
&= (9-6\lambda+\lambda^2)(5-\lambda) - 24 + 8\lambda = \\
&= (45-9\lambda-30\lambda+6\lambda^2+5\lambda^2-\lambda^3) - 24 + 8\lambda = -\lambda^3+11\lambda^2-31\lambda+21
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Ruffini al polinomio resultante se obtienen sus raíces, que se corresponden con los valores propios de A:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 11 & -31 & 21 \\
3 & & & -3 & 24 & -21 \\
\hline
 & -1 & 8 & -7 & 0 \\
7 & & & -7 & 7 \\
\hline
 & -1 & 1 & 0 & \\
1 & & & -1 & \\
\hline
 & -1 & 0 & &
\end{array}$$

Así $q_{A(\lambda)} = |A - \lambda I| = -\lambda^3+11\lambda^2-31\lambda+21 = (\lambda-3)(\lambda-7)(\lambda-1)$

Por tanto, los valores propios son:

- $\lambda_1 = 3$, con multiplicidad algebraica 1 (**ma(3)=1**)
- $\lambda_2 = 7$, con multiplicidad algebraica 1 (**ma(7)=1**)
- $\lambda_3 = 1$, con multiplicidad algebraica 1 (**ma(1)=1**)

Se verifican las propiedades de traza y determinante de A, pues

- **tr(A) = 3+3+5 = 11**, y la suma de los valores propios es **3+7+1 = 11**
- **det(A) = 21**, y el producto de los valores propios es **3·7·1 = 21**

7.3.

- Para $\lambda_1 = 3$, se resuelve el sistema homogéneo $[A - \lambda I]x = 0$
Así, se resuelve el sistema $[A - 3I]x = 0$

$$[A - 3I]x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema se obtiene la reducida de A-3I por Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1=F3} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1=(-1/2)F1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F2=(-1/2)F2}$$

Alumn@ DNI	Profesor
---------------	----------

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad F3 = (-1/2)F3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad F1 = F1 + F2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F3 = F3 - F2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2 unos principales, 1 parámetro (x_2) -

Por tanto, la solución del sistema viene dada por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_3 = 0$$

De esta forma, los vectores solución del sistema tienen la forma:

$$(-x_2, x_2, 0) = x_2(-1, 1, 0)$$

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 3$ es:

$$E_A(\lambda_1) = \text{Env}\{(-1, 1, 0)\}$$

Un vector propio asociado a $\lambda_1 = 3$ sería $u = (-1, 1, 0)$

Para comprobarlo, hay que ver si se cumple que $A \cdot u = \lambda \cdot u$

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot u = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda_2 = 7$, se resuelve el sistema homogéneo $[A - \lambda I]x = 0$
Así, se resuelve el sistema $[A - 7I]x = 0$

$$[A - 7I]x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema se obtiene la reducida de $A - 7I$ por Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad F1=F3 \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad F1=(-1/2)F1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 \end{array} \quad F3=F3+4F1$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad F2=(-1/4)F2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad F3=F3-4F2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 F1=F1-F2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

- 2 unos principales, 1 parámetro (x_3) -

Por tanto, la solución del sistema viene dada por las ecuaciones:

$$x_1 + 1/2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1/2x_3$$

$$x_2 + 1/2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1/2x_3$$

De esta forma, los vectores solución del sistema tienen la forma:

$$(-1/2x_3, -1/2x_3, x_3) = x_3(-1/2, -1/2, 1)$$

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 7$ es:

$$E_A(\lambda_2) = \text{Env}\{(-1/2, -1/2, 1)\}$$

Un vector propio asociado a $\lambda_2 = 7$ sería $\mathbf{u} = (-1, -1, 2)$

Para comprobarlo, hay que ver si se cumple que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot \mathbf{u} = 7 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

- Para $\lambda_3 = 1$, se resuelve el sistema homogéneo $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Así, se resuelve el sistema $[\mathbf{A} - \mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$[\mathbf{A} - \mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alumn@ DNI	Profesor
---------------	----------

Para resolver el sistema se obtiene la reducida de $A-I$ por Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{array} \right] \quad F1=F3 \quad \left[\begin{array}{ccc} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \quad F1=(-1/2)F1 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \\ F3=F3-2F1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \quad F2=1/2F2 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \quad F3=F3+2F2 \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ F1=F1-F2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

- 2 unos principales, 1 parámetro (x_3) -

Por tanto, la solución del sistema viene dada por las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \end{array}$$

De esta forma, los vectores solución del sistema tienen la forma:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_3(1, 1, 1)$$

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda_3 = 1$ es:

$$E_A(\lambda_3) = \text{Env}\{(1, 1, 1)\}$$

Un vector propio asociado a $\lambda_3 = 1$ sería $u = (1, 1, 1)$

Para comprobarlo, hay que ver si se cumple que $A \cdot u = \lambda \cdot u$

$$A \cdot u = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot u = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$