Estudiante	
DNI	
Profesor	

Ejercicio 1 (1.00 p)	Ejercicio 2 (3.00 p)	Ejercicio 3 (2.00 p)	**NOTA FINAL**
Ejercicio 4 (1.25 p)	Ejercicio 5 (1.25 p)	Ejercicio 6 (1.50 p)	

EJERCICIOS DE LÓGICA (4 puntos)

[1.00p] **Ejercicio 1.** Lenguaje proposicional.

Rodea con un círculo las **fórmulas bien formadas** (fbfs) que representan cada expresión. A, B y C son proposiciones cualesquiera.

Expresión	fbf	fbf	fbf	fbf	fbf
Es cierto A y B a menos que no lo sea C	$A \wedge B \rightarrow \neg C$	$\neg C \rightarrow A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg C$	$(A \wedge B) \vee \neg C$
Sólo si es cierto A, pero no B, es falso C	$\neg C \rightarrow A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$C \vee (A \wedge \neg B)$	$A \wedge \neg B \rightarrow \neg C$	$(A \wedge \neg B) \vee \neg C$
Para que sea falso A y B es suficiente que lo sea C	$\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg C$	$C \vee \neg(A \wedge B)$	$\neg(\neg C \wedge A \wedge B)$
No es necesario que sea falso A para que lo sea B, pero no C	$\neg(\neg B \wedge C \rightarrow \neg A)$	$\neg A \rightarrow \neg B \wedge C$	$A \vee \neg B \wedge \neg C$	$\neg B \wedge C \rightarrow \neg A$	$B \wedge \neg C \wedge A$

SOLUCIÓN

Expresión	fbf	fbf	fbf	fbf	fbf
Es cierto A y B a menos que no lo sea C	$A \wedge B \rightarrow \neg C$	$\neg C \rightarrow A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$	$\boxed{\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg C}$	$\boxed{(A \wedge B) \vee \neg C}$
Sólo si es cierto A, pero no B, es falso C	$\boxed{\neg C \rightarrow A \wedge \neg B}$	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$\boxed{C \vee (A \wedge \neg B)}$	$A \wedge \neg B \rightarrow \neg C$	$(A \wedge \neg B) \vee \neg C$
Para que sea falso A y B es suficiente que lo sea C	$\boxed{\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)}$	$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$	$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg C$	$\boxed{C \vee \neg(A \wedge B)}$	$\boxed{\neg(\neg C \wedge A \wedge B)}$
No es necesario que sea falso A para que lo sea B, pero no C	$\boxed{\neg(\neg B \wedge C \rightarrow \neg A)}$	$\neg A \rightarrow \neg B \wedge C$	$A \vee \neg B \wedge \neg C$	$\neg B \wedge C \rightarrow \neg A$	$B \wedge \neg C \wedge A$

[3.00p] **Ejercicio 2**. Argumentación.

a) [0.50p] **Define** qué es un **razonamiento correcto** en lógica.
b) [0.75p] Para estos métodos,
   i) **Tabla de verdad.**
   ii) **Método del Contraejemplo.**
   iii) **Deducción Natural.**

   Explica por qué demuestran si un razonamiento es correcto, y **cómo** lo hacen.

c) [1.75p] **Prueba la validez** del razonamiento R por cada uno de los 3 métodos del apartado b).
   i) Razonamiento R:
   P1: $A \vee \neg B$ **P2**: $A \to B \wedge C$ **P3**: $C \to \neg B$
   Q: $\neg B$

SOLUCIÓN

a) Un argumento, razonamiento, es correcto si no es posible interpretar las premisas como verdaderas y la conclusión, como falsa.
b)
i) <u>Tabla de verdad</u>: se interpreta el argumento en una tabla de 2n filas correspondientes a las interpretaciones de las n variables proposicionales distintas que aparecen en la estructura o argumento lógico. En cada columna se interpretan las fórmulas según la jerarquía de sus conectivas. Como este argumento cuenta con 3 variables proposicionales distintas tendremos 23 = 8 filas/interpretaciones.

A	B	C	$\neg B$	**P1:** $A \vee \neg B$	**P2:** $A \to B \wedge C$	**P3:** $C \to \neg B$	**Q:** $\neg B$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Respuesta sobre la validez de R: como no existen interpretaciones en las que las premisas se interpretan como verdaderas y la conclusión falsa se puede afirmar que el argumento **R es**

correcto. Las dos únicas interpretaciones en que las premisas son V la conclusión también lo es (filas 7 y 8 de la tabla).

ii) Método del contraejemplo: este método consiste en analizar si es posible interpretar las premisas como ciertas y la conclusión como falsa. Para comprobarlo, suponemos la existencia de dicha interpretación en el argumento y verificamos los valores de verdad de sus fórmulas atómicas. Si dichos valores confirman la interpretación contraejemplo, el argumento no será correcto pero si al determinar los valores de verdad de las proposiciones atómicas aparece una contradicción, el argumento no será correcto. Estudiamos esta situación con R.

Fbf-P1: $A \vee \neg B$ = V
Fbf-P2: $A \to B \wedge C$ = V
Fbf-P3: $C \to \neg B$ = V
Fbf- Q: $\neg B$ = F

(1) Si la conclusión ($\neg B$) es falsa, entonces **B será V**.
(2) Si la premisa 3 ($C \to \neg B$) es verdadera y ¬B es F (1), entonces **C deberá ser también F**.
(3) Si la premisa 1 ($A \vee \neg B$) es verdadera y ¬B es F (1), entonces **A deberá ser V**.
(4) Si la premisa 2 ($A \to B \wedge C$) es verdadera y C es F (2), entonces B ^ C será F y por tanto **A deberá ser F**.

Como vemos, en el transcurso de la búsqueda de los valores de verdad de todas las fórmulas aparece una contradicción puesto que A es V (3) y también A es F (4). Esto significa que R no tiene una interpretación contraejemplo, por lo que podemos afirmar que **R es CORRECTO**.

iii) Deducción Natural: A partir de las premisas y aplicando reglas de inferencia se obtiene la conclusión.
Realizamos la demostración aplicando la estrategia de los casos (regla ED).

- 1	A v ¬B	
- 2	A ⟶ B ^ C	
- 3	C ⟶ ¬B	
4	A	Supuesto-1
5	B ^ C	MP 2, 4
6	C	EC, 5
7	¬ B	MP 3, 6
8	¬ B	Supuesto-2
9	¬ B	ID, 8
10	¬B	Casos, 1, 4-7, 8-9

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA (6 puntos)

[2.00p] **Ejercicio 3.** Sistemas de ecuaciones lineales.

3.1. [0.25p] **Explica** los tipos de **operaciones elementales** por filas para escalonar matrices cuadradas. **Indica** si la siguiente operación es elemental y de qué tipo:

$$F_1 \leftarrow (1/2)F_1$$

3.2. [0.25p] Sea $Ax = B$ la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales y M la matriz aumentada. **Escribe** las ecuaciones del sistema. Usa como incógnitas x_i , $i = 1..n$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3. [0.75p] ¿Qué **características** tendrá M' si es una matriz **escalonada** de **M**? Calcula paso a paso M'.

3.4. [0.50p] Para cada operación elemental que hayas aplicado calculando M' escribe la **matriz elemental** E_i correspondiente.

3.5. [0.25p] Según M', ¿es **consistente** el sistema? **Explica** por qué y, si corresponde, escribe la solución.

SOLUCIÓN

3.1.

La operación elemental de fila propuesta es una operación elemental **correcta**, ya que se corresponde con la definición de operación elemental de escalar por fila que es $F_i \leftrightarrow \alpha F_i$, $\alpha \neq 0$.

3.2.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.3.

M´ es una matriz escalonada de M

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diremos que una matriz está en **forma escalonada** si:

1. Todas las filas de ceros están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento de cada fila diferente de cero está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila anterior.
3. El valor de los elementos referidos en el punto anterior es de 1.

3.4.

En nuestro caso (recuerda que la matriz escalonada no es única), las operaciones elementales por fila aplicadas a M para obtener la matriz escalonada M´ y las matrices elementales asociadas son:

1. $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - 4F_1$
$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. $F_2 \leftarrow (1/3)F_2$
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5/3 \\ 0 & 3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. $F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2$
$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
4. $F_3 \leftarrow (-1/7)F_3$
$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{bmatrix}$$

3.5.

El sistema dado es **inconsistente** porque la última fila de la matriz M´ representa una ecuación sin solución 0 = 1.

[1.25p] **Ejercicio 4**. Subespacios vectoriales.

4.1. [0.50p] Determina el **valor** de a para que el vector $u = (1, a, 5)$ pertenezca al subespacio $S_1 = \{(1,2,3),\ (1,1,1)\}$ de R^3

4.2. [0.75p] Encuentra una **base** del subespacio vectorial S_2 de R^4. **Indica** su **dimensión**.

$$S_2 = \{(1,2,-1,3),\ (2,1,0,-2),\ (0,1,2,1), (3,4,1,2)\}$$

SOLUCIÓN

4.1.

El vector u pertenece al subespacio S si y sólo si u es combinación lineal de los vectores de S.
Lo comprobamos resolviendo el sistema lineal asociado a la ecuación (1). Para ello suponemos que existen los escalares $\alpha,\ \beta \in R$ tales que:

$$u = (1, a, 5) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,1,1) \quad (1)$$

Resolviendo el sistema tenemos: $\alpha = 2,\ \beta = -1$, luego $a = 3$.

4.2.

Para encontrar los vectores de S que forman una base buscamos los que sean linealmente independientes y un sistema generador. Para ello planteamos la ecuación (2) y resolvemos el sistema lineal homogéneo asociado, $Ax = 0\,/\,x = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,/\,x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.

$$x_1(1,2,-1,3) + x_2(2,1,0,-2) + x_3(0,1,2,1) + x_4(3,4,1,2) \ = \ (0,0,0,0) \quad (2)$$

La matriz reducida de la matriz ampliada del sistema $Ax = 0$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema es:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -x_4$$

que nos indica que el vector $(3,4,1,2)$ es combinación lineal de los otros vectores (única incógnita que no tiene 1 principal en la matriz reducida -columna 4-).

Los demás vectores son linealmente independientes y forman un sistema generador de S, pues al resolver el sistema asociado a la ecuación (3):

$$x_1(1,2,-1,3)+x_2(2,1,0,-2)+x_3(0,1,2,1) = (0,0,0,0) \qquad (3)$$

Obtenemos que todas las incógnitas tienen valor cero: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

luego una base de S está formada por los vectores: $\{(1,2,-1,3),(2,1,0,-2),\ (0,1,2,1)\}$, y su dimensión es 3.

`[1.25p]` **Ejercicio 5.** Espacios vectoriales de una matriz.

Dada la matriz A y su matriz reducida A':

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5.1. `[0.25p]` ¿Qué vectores de A forman base del **subespacio fila** de A ($Fil\,A$)? ¿Podría una base de $Fil\,A$ tener un número distinto de vectores? Justifica tu respuesta.

5.2. `[0.25p]` Considera una base del **subespacio columna** de A ($Col\,A$). ¿Cuántos vectores tiene como máximo? Justifica tu respuesta.

5.3. `[0.25p]` **Obtén** dos **bases** para los subespacios $Fil\,A$ y $Col\,A$.

5.4. `[0.50p]` ¿A qué subespacios pertenecen los vectores $u = (3,2)$ y $v = (-1,1,1)$? **Justifica** tu respuesta.

SOLUCIÓN

5.1.

Los vectores que formarán una base de $Fil\,A$ serán los que tengan 1´s principales en las filas de la matriz reducida de A.

Como las filas que tienen un 1 principal en A' son las filas 1, 2 y 3, los vectores que forman la base de $Fil\,A$ son $Env\{(2,-3,-8,7),(2,-1,2,-7),(1,0,-3,6)\}$.
Una base de $Fil\,A$ podría tener hasta 4 vectores, pues los vectores de $Fil\,A$ pertenecen a R^4.

5.2.

Como los vectores de $Col\,A$ pertenecen a R^3, una base de $Col\,A$ puede tener, como máximo, 3 vectores.

5.3.

Como las filas que tienen un 1 principal en A' son las filas 1, 2 y 3, los vectores que forman la base de $Fil\,A$ son $Env\{(2,-3,-8,7),(2,-1,2,-7),(1,0,-3,6)\}$.
Como las columnas que tienen un 1 principal en A' son las columnas 1, 2 y 3, los vectores que forman la base de $Col\,A$ son $Env\{(2,2,1),(-3,-1,0),(-8,2,-3)\}$.

5.4.

El vector $u = (3,2)$ no puede estar en $Fil\,A$, subespacio de R^4, ni en $Col\,A$, subespacio de R^3, pues $u \in R^2$.

El vector $v=(-1,1,1)$ no puede estar en $Fil\,A$, subespacio de R^4, pero sí pertenece a $Col\,A$, subespacio de R^3, pues $v\in R^3$ y se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base de $Col\,A$, pues $(-1,1,1)=1(2,2,1)+1(-3,-1,0)+0(-8,2,-3)$

[1.50p] **Ejercicio 6**. Valores y vectores propios de una matriz

6.1. [0.60p] **Elige** la opción correcta en cada caso:

a) Los autovalores λ_i de una matriz A son las **raíces** del polinomio característico que se obtiene al plantear el determinante:

a.1. $\det(A - \lambda I) = 0$

a.2. $\det(A + \lambda I) = 0$

b) Si el polinomio característico es de **grado 3** entonces:

b.1. A tiene exactamente 3 autovalores reales.

b.2. A puede tener 1, 2 o 3 autovalores reales.

c) Todo autovalor λ_i tiene:

c.1. Un número finito de autovectores

c.2. Infinitos autovectores asociados a él.

d) Cada conjunto de autovectores conforma un **subespacio** cuyos vectores:

d.1 Son los vectores del subespacio $Nul\, A$ siempre.

d.2. Son los vectores del subespacio $Nul\, A$ sólo para $\lambda = 0$.

e) La **multiplicidad geométrica** es:

e.1 La dimensión del subespacio generado por un autovalor.

e.2. El número de autovalores de la matriz.

f) La **traza** de una matriz coincide con:

f.1. El producto de todos los autovalores de la matriz.

f.2. La suma de todos los autovalores de la matriz.

6.2. [0.90p] Considera la matriz B, con $a \in R$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

6.2.1 **Prueba** que el vector $v = (1, -1, 0)$ es un **autovector** de B asociado al autovalor $\lambda = 2$.

6.2.2 **Calcula** el valor de a para el que el **autovalor** $\lambda = 2$ sea el **único** autovalor de B.

SOLUCIÓN

6.1.

a) a.1. b) b.1. c) c.2. d) d.2. e) e.1. f) f.2.

6.2.

6.2.1

Para comprobar que v es un autovector de B asociado al autovalor $\lambda = 2$ comprobamos que:

$$Bv = 2v$$

$$Bv = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.2.2

Si 2 es el único autovalor, entonces como B tiene 3 autovalores y

$$traza\,(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Además, como $traza\,(B) = 2 + a$, entonces $2 + a = 6$, con lo que $a = 4$