Alumn@ DNI		Profesor

Ejercicio 1 (1.50p)	Ejercicio 2 (1.00p)	Ejercicio 3 (1.50p)	NOTA
Ejercicio 4 (2.00p)	Ejercicio 5 (2.00p)	Ejercicio 6 (2.00p)	

EJERCICIOS DE LÓGICA (4 puntos)

[1.50p] **Ejercicio 1.** Formalizar e interpretar proposiciones en lógica de proposiciones.

Considera las expresiones **E1**, **E2** y **E3** donde A, B y C son variables proposicionales que representan cualquier enunciado atómico del lenguaje natural.

E1: Es cierto A y B a menos que sea cierto C.
E2: Si es cierto A, pero no B, entonces es falso que sea cierto C sólo si no lo es B
E3: Es suficiente que sea falso A o B para que no lo sea C, es decir, al menos uno es cierto, A o B o no C

a) Para cada expresión (E1, E2, E3), escribe su fórmula bien formada (fbf-Ei, i = 1,2,3) indicando cuál es su conectiva principal.
b) Interpreta cada fbf-Ei para cada conjunto de valores de verdad **I1**, **I2** donde **I1** = { A: V; B: V; C: V }, **I2** = { A: F; B: V; C: F }. Indica si son interpretaciones modelo o contramodelo.
c) Explica cómo se puede clasificar **semánticamente** cualquier fórmula proposicional.

SOLUCIÓN

a) $fbf-E1:\ \neg(A\wedge B)\rightarrow C$. Su conectiva principal es $\rightarrow$, porque es la que determina su valor de verdad
$fbf-E2:\ A\wedge\neg B\rightarrow\neg(C\rightarrow\neg B)$. Su conectiva principal es $\rightarrow$, porque es la que determina su valor de verdad.
$fbf-E3:\ (\neg(A\vee B)\rightarrow\neg C)\ \leftrightarrow A\vee B\vee\neg C$. Su conectiva principal es $\leftrightarrow$, porque es la que determina su valor de verdad.

b) Para $I1=\{A:V;\ B:V;C:V\}$

- $fbf-E1:\ \neg(A\wedge B)\rightarrow C=\ \neg(V\wedge V)\rightarrow V=F\rightarrow V=V$.
Por tanto, la interpretación I1 es modelo de la fórmula fbf_E1, pues la hace verdadera.
- $fbf-E2:\ A\wedge\neg B\rightarrow\neg(C\rightarrow\neg B)\ =V\wedge F\rightarrow\neg(V\rightarrow F)=F\rightarrow V=V$.
Por tanto, la interpretación I1 es modelo de la fórmula fbf_E2, pues la hace verdadera.

Alumn@ DNI		Profesor

- $fbf - E3: \ (\neg(A \vee B) \to \neg C) \ \leftrightarrow A \vee B \vee \neg C =$
  $= (\neg(V \vee V) \to F) \leftrightarrow V \vee V \vee F = (F \to F) \leftrightarrow V = V \leftrightarrow V = V$
  Por tanto, la interpretación I1 es modelo de la fórmula fbf_E3, pues la hace verdadera.

Para $I2 = \{A: F; \ B: V; C: F\}$

- $fbf - E1: \ \neg(A \wedge B) \to C = \ \neg(F \wedge V) \to F = V \to F = F$.
  Por tanto, la interpretación I2 es contramodelo de la fórmula fbf_E1, pues la hace falsa.
- $fbf - E2: \ A \wedge \neg B \to \neg(C \to \neg B) \ = F \wedge F \to \neg(F \to F) = F \to F = V$.
  Por tanto, la interpretación I2 es modelo de la fórmula fbf_E2, pues la hace verdadera.
- $fbf - E3: \ (\neg(A \vee B) \to \neg C) \ \leftrightarrow A \vee B \vee \neg C =$
  $= (\neg(F \vee V) \to V) \leftrightarrow F \vee V \vee V = (F \to V) \leftrightarrow V = V \leftrightarrow V = V$
  Por tanto, la interpretación I2 es modelo de la fórmula fbf_E3, pues la hace verdadera.

c) Una fórmula proposicional se puede clasificar semánticamente como tautología, contradicción o contingencia.
   - Tautología: la fórmula se interpreta como verdadera para todas sus interpretaciones.
   - Contradicción: la fórmula se interpreta como falsa para todas sus interpretaciones.
   - Contingencia: la fórmula se interpreta como verdadera para algunas interpretaciones y falsa para otras.

Alumn@		Profesor
DNI		

[1.00p] **Ejercicio 2.** Validez de razonamientos.

a) Al estudiar la validez de $R: P_1, P_2 \implies Q$ en una tabla de verdad se ha obtenido:

	P_1	P_2	Q
1	V	F	F
2	F	F	F
3	F	V	F
4	F	V	F
5	V	F	V
6	V	F	V
7	V	V	F
8	V	V	V

¿Qué es una interpretación **contraejemplo**? Si existe, ¿en qué afecta a la validez del razonamiento? Explica si R admite una interpretación **contraejemplo**, indicándola, si existe. Sabiendo si existe o no el **contraejemplo**, ¿Es válido R o no? ¿Por qué?

b) Considera una fórmula asociada a R, por ejemplo, $fbf - R: P_1 \to (P_2 \to Q)$.

Suponemos que la fórmula se clasifica **semánticamente** como **contingente**.
Cuál de estas dos opciones es correcta: (1) Es cierto que Res válido para las interpretaciones modelo de la $fbf - R$ y no es válido para las contramodelo, (2) R no es válido por ser contingente su fórmula asociada.
¿Qué clasificación semántica de la fórmula indicaría que R es válido?

SOLUCIÓN

d) Una interpretación contraejemplo de un argumento es una interpretación que hace las premisas ciertas y la conclusión falsa. Si existe, afecta al razonamiento pues lo hace no válido. La interpretación de la fila 7, I7 = { P1:V, P2:V, Q:F } es una interpretación contraejemplo para R. Esto demuestra que R no es válido, ya que por definición, R no es válido cuando admite, al menos, una interpretación en la que todas las premisas se interpretan como verdaderas y la conclusión falsa.

e) La opción correcta es la (2), puesto si la fbf asociada a un razonamiento R es contingente, admite al menos una interpretación contraejemplo, por lo que no sería válido. Un razonamiento es válido si y sólo si su fórmula asociada es una tautología. ya que una tautología no admite ninguna interpretación contraejemplo.

Alumn@ DNI		Profesor

[1.50p] **Ejercicio 3.** Completa cada deducción natural (celdas con fondo blanco) según la estrategia solicitada. Para cada estrategia escribe la regla de deducción en la que se basa.

a) Estrategia: **Prueba por casos** $Q:\ A \vee B$

SOLUCIÓN

Se basa en la regla Eliminación del Disyuntor (ED) o Prueba por Casos (Cas)

	Fórmula	Regla aplicada	Supuesto (Apertura/Cierre)
-1	$D \vee C$	Premisa	
-2	$D \to A$	Premisa	
-3	$C \to B$	Premisa	
4	D		Supuesto 1
5	A	$MP\ 2,4$	
6	$A \vee B$	$ID\ 5$	Cierre Supuesto 1
7	C		Supuesto 2
8	B	$MP\ 3,7$	
9	$A \vee B$	$ID\ 8$	Cierre Supuesto 2
10	$A \vee B$	$ED\ 1,4-6,7-9$	

Alumn@ DNI		Profesor

b) Estrategia: **Prueba directa** $Q: \neg C \rightarrow D$

SOLUCIÓN

Se basa en la regla Teorema de Deducción (TD) o Introducción del Implicador (II)

	Fórmula	Regla aplicada	Supuesto (Apertura/Cierre)
-1	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	Premisa	
-2	$A \rightarrow C$	Premisa	
-3	$B \rightarrow D$	Premisa	
4	$\neg C$		Supuesto
5	$\neg A$	$MT\ 2,4$	
6	$A \vee B$	$EC\ 1$	
7	B	$SD\ 5,6$	
8	D	$MP\ 3,7$	
9	$B \rightarrow D$	$TD\ 4-8$	

c) Estrategia: **Reducción al absurdo** $Q: \neg(A \wedge \neg A)$

SOLUCIÓN

Se basa en la regla Reducción al Absurdo (Abs) o Introducción del negador (IN), basada en suponer la negación de la conclusión y llegar a una contradicción.

	Fórmula	Regla aplicada	Supuesto (Apertura/Cierre)
1	$A \wedge \neg A$		Supuesto
2	A	$EC\ 1$	
3	$\neg A$	$EC\ 1$	
4	$A \wedge \neg A$	$IC\ 2,3$	Cierre Supuesto
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$Abs\ 1-4$	

Alumn@ DNI		Profesor

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA (6 puntos)

`[2.00p]` **Ejercicio 4.**

4.1. `(1.00p)` Sean las siguientes matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -b & 0 & 1 \\ 0 & b & -1 \end{bmatrix} \quad \text{con } a,\ b \in \mathbb{R}$$

Escribe y calcula $A \cdot B$ como el producto de A por las columnas de B.
¿Es posible calcular dicho producto $A \cdot B$ como el de las columnas de A por la matriz B? Justifica tu respuesta, y en caso afirmativo, escribe y calcula dicho producto.

4.2. `(1.00p)` Sea la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

Escribe la **matriz elemental** E que permite obtener la forma reducida de A, y escribe y comprueba cómo se obtendría $rref(A)$ a partir de E. Explica los pasos que realices.
¿A y E **conmutan** en función del valor de a? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN

4.1. Si llamamos $b_i,\ i = 1, 2, 3$ a las columnas de la matriz B, el producto $A \cdot B$ se calcularía de la siguiente forma:

$$A \cdot B = A \cdot [b_1 \quad b_2 \quad b_3] = [A \cdot b_1 \quad A \cdot b_2 \quad A \cdot b_3]$$

Así,

$$A \cdot b_1 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ab \\ -b \\ b \end{bmatrix}$$

$$A \cdot b_2 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ -ab \end{bmatrix}$$

$$A \cdot b_3 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 \\ 1 \\ a-1 \end{bmatrix}$$

Alumn@ DNI		Profesor

De esta forma,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -ab & -b & a+1 \\ -b & 0 & 1 \\ b & -ab & a-1 \end{bmatrix}$$

Escribir el producto $A \cdot B$ como el de las columnas de A por la matriz B supondría realizarlo de la siguiente forma, llamando $a_i,\ i = 1,2$ a las columnas de la matriz A:

$$A \cdot B = [a_1 \quad a_2] \cdot B = [a_1 \cdot B \quad a_2 \cdot B]$$

pero multiplicar $a_i \cdot B$ no sería posible, pues a_i tiene dimensiones 3x1 y la matriz B es 2x3, por tanto, no se puede calcular dicho producto de esa forma.

4.2. Para obtener la forma reducida de A, habría que aplicar la operación elemental de Fila $F_1 \leftarrow F_1 + aF_3$, y de esta forma

$$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz elemental que corresponde a dicha operación elemental de fila $F_1 \leftarrow F_1 + aF_3$ es

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, para obtener $rref(A)$ a partir de E tendría que realizarse el producto $E \cdot A$,

$$E \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = rref(A)$$

A y E conmutan independientemente del valor de a, porque

$$A \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \cdot A$$

Alumn@ DNI		Profesor

[2.00p] **Ejercicio 5**.

5.1. (0.75p) Dado el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(a,\, b,\, c)\,/\, c = a \cdot b\} \quad \text{con } a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

Demuestra si S es o no un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Justifica tu respuesta.

5.2. (1.25p) Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sean los vectores u, v, w tal que $u = (1,-1,-1,1) \in \mathbb{R}^4$, $v = (2,8,6) \in \mathbb{R}^3$, $w = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.
Comprueba si los vectores pertenecen a los subespacios **Fila**, **Columna** y **Nulo** de la matriz A. Justifica tus respuestas.

SOLUCIÓN

5.1. Para que S sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, debe cumplir las siguientes propiedades:

- El vector nulo pertenece a S, $0 \in S$
- $\alpha u \in S, \forall u \in S, \alpha \in \mathbb{R}$
- $u + v \in S, \forall u, v \in S$

a) $(0,\, 0,\, 0) \in S$ ya que si $c = 0 = a \cdot b = 0 \cdot 0$, luego el vector nulo pertenece a S

b) Sea $u = (a,\, b,\, c) \in S$, hay que demostrar que $\alpha u \in S$
$\alpha u = \alpha(a,\, b,\, c) = (\alpha a,\, \alpha b,\, \alpha c)$
Hay que demostrar que $\alpha c = \alpha a \cdot \alpha b$, es decir, $\alpha c = \alpha^2 ab$
En general, no se puede asegurar que $\alpha c = \alpha^2 ab$ porque por ejemplo tomando $(1,1,1) \in S$ // $1 = 1 \cdot 1$ // y $\alpha = 2$ entonces $2 \cdot (1,1,1) = (2,2,2)$ que no pertenece a S, pues $2 \neq 2 \cdot 2$

Es decir, se pueden encontrar muchos ejemplos de vectores $(a,\, b,\, c)$ pertenecientes a S y escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que $\alpha(a,\, b,\, c)$ no pertenezca a S.
Por tanto, S **NO** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

c) También, la suma de vectores no se cumple en general, pues se pueden encontrar muchos ejemplos de vectores $(a,\, b,\, c)$ y (d, e, f) pertenecientes a S de forma que $(a,\, b,\, c) + (d, e, f)$ no pertenezca a S.
Por ejemplo, $(1,1,1)$ y $(2,\, 2,\, 4) \in S$, pero su suma $(3,3,5)$ no.
Por tanto, S **NO** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Alumn@ DNI		Profesor

5.2.

❖ **Subespacio Fila**

Las filas de A consideradas como 4 vectores de $\mathbb{R}^2$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^2$ llamado Subespacio fila de A (Fil A).
Una base de Fil A está formada por las filas de A que en su reducida tiene 1's principales.

Por tanto, hay que obtener la reducida de A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando $F_1 \leftarrow (1/3)F_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando $F_2 \leftarrow (-1)F_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando $F_3 \leftarrow F_3 + 3F_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aplicando $F_4 \leftarrow F_4 - F_2$

$$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las filas de A que tienen un 1 principal en su reducida son las filas 1 y 2.
Así, $Fil\,A = Env\{(3,\,0),\,(0,-1)\}$ y $Dim\,Fil\,A = 2$

$u,\,v$ no pertenecen a $Fil\,A$ porque no pertenecen a $\mathbb{R}^2$.
$w = (1,1) \in Fil\,A$ porque sí se puede obtener como combinación lineal de $(3,\,0)\;y\,(0,-1)$ ya que $(1,1) = 1/3(3,0) + (-1)(0,-1)$

Alumn@ DNI		Profesor

- **Subespacio Columna**

Las columnas de A consideradas como 2 vectores de $\mathbb{R}^4$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^4$ llamado Subespacio columna de A (Col A).
Una base de Col A está formada por las columnas de A que en su reducida tiene 1's principales.

Del resultado de rref(A) obtenido anteriormente, se deduce que las columnas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las columnas 1 y 2.
Así, $Col\,A = Env\{(3,0-3,0),(0,-1,0,1)\}$ y $Dim\,Col\,A = 2$

El vector $u = (1,\ -1,-1,1)$ sí pertenece a $Col\,A$ pues se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base, ya que
$(1,\ -1,-1,1) = 1/3(3,0,-3,0) + (0,-1,0,1)$.
v, w quedan descartados porque no pertenecen a $\mathbb{R}^4$.

- **Subespacio Nulo**

El subespacio Nulo de A coincide con el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo Ax=0, donde los x son vectores $\in \mathbb{R}^2$.

Del resultado de rref(A) obtenido anteriormente, se deduce que el sistema de ecuaciones equivalente no tiene parámetros, ya que las 2 columnas de A tienen un 1 principal.
Así, el sistema equivalente es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\ &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el único vector solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es $(0,\ 0)$

Así, $Nul\,A = Env\{(0,0)\}$ y $Dim\,Nul\,A = 1$

u, v quedan descartados porque no pertenecen a $\mathbb{R}^2$.
El vector $w = (1,1)$ tampoco pertenece a $Nul\,A$ pues no se puede poner como combinación lineal del vector $(0,0)$.

Alumn@ DNI		Profesor

[2.00p] **Ejercicio 6.** Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{con } b,\, c \in \mathbb{R}$$

Si se sabe que la traza de la matriz A es 6 y que $u_1 = (0,0,1)$ y $u_2 = (1,-1,2)$ son dos vectores propios de A.

6.1. (0.75p) Empieza con la definición de vector propio y, a partir de ahí, calcula los valores de b, c, explicando los pasos que realices.

6.2. (0.25p) Calcula los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

6.3. (1.00p) Calcula el subespacio propio asociado al valor propio mayor, determina su multiplicidad geométrica y pon un ejemplo de autovector asociado. Explica todos los pasos que realices y comprueba los resultados que obtengas.

SOLUCIÓN

6.1. Si la traza de A es 6,

$$2 + b + c = 6 \implies b + c = 4$$

Si $u_1 = (0,0,1)$ es un vector propio de A, entonces $\exists \lambda_1 / A \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot u_1$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y así}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ de donde } \lambda_1 = c$$

Si $u_2 = (1,-1,2)$ es un vector propio de A, entonces $\exists \lambda_2 / A \cdot u_2 = \lambda_2 \cdot u_2$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ y así}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1-b \\ 2+2c \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De esta forma, se plantean las siguientes ecuaciones:

Alumn@ DNI		Profesor

$$\begin{array}{ll} (1) & b+c=4 \\ (2) & c=\lambda_1 \\ (3) & 2=\lambda_2 \\ (4) & 1-b=-\lambda_2 \\ (5) & 2+2c=2\lambda_2 \end{array}$$

, es decir, un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas

Enfocándose en el valor de b, de (3) y (4) tenemos que $2=-(1-b)=b-1$ y así $b=3$

De (5) se puede simplificar a $1+c=\lambda_2$ y teniendo en cuenta (3), $1+c=2$ y así $c=1$

Así, la matriz queda
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2.

Teniendo en cuenta el valor de c obtenido en el apartado anterior, sustituyendo en (2) se tiene que $\lambda_1=1$

Por ser A una matriz de dimensiones 3x3, tiene 3 autovalores, luego falta por obtener λ_3.

Para ello, si consideramos la propiedad de que la traza de la matriz A es igual a la suma de sus autovalores, entonces $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6$, con lo que $\lambda_3=3$.

De esta forma, los 3 autovalores de la matriz A y sus multiplicidades algebraicas son:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1=1 & \rightarrow & m_a(1)=1 \\ \lambda_2=2 & \rightarrow & m_a(2)=1 \\ \lambda_3=3 & \rightarrow & m_a(3)=1 \end{array}$$

También, $\det(A)=6$, y se cumple que $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=6$.

6.3.

El valor propio mayor de los 3 es $\lambda=3$.

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda=3$, $E_A(3)=Nul(A-3I)$

$$Nul(A-3I)=\{x/x\in\mathbb{R}^n,\ (A-3I)x=0\}$$

Alumn@ DNI		Profesor

De esta forma, hay que calcular las soluciones del sistema homogéneo $(A-3I)x=0$.

La matriz asociada a dicho sistema es:

$$A-3I=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

La forma reducida de $A-3I$ es:

$$rref(A-3I)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

aplicando sucesivamente las operaciones elementales de Fila $F_1\leftarrow(-1)F_1$, $F_2\leftarrow F_2-F_1$, $F_2\leftrightarrow F_3$, $F_2\leftarrow F_2-2F_1$, $F_2\leftarrow(-1/2)F_2$

Resolviendo el sistema asociado:

$$x_1=0$$
$$x_3=0 \text{ con } x_2\, parametro$$

Así, las soluciones del sistema tienen la forma $(0,x_2,0)=x_2(0,1,0)$

Por tanto, $Nul(A-3I)=\{(0,1,0)\}$

Así, $mg(3)=\dim(E_A(3))=1$

Ejemplos de autovectores asociados a $\lambda=3$ son $(0,1,0),\ (0,2,0),\ (0,-1,0),\dots$

Para comprobar el resultado con el autovector $v=(0,1,0)$, aplicamos la expresión $A\cdot v=\lambda\cdot v$

$$A\cdot v=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\2&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda\cdot v=3\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

Con lo que queda demostrado.