

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

Ejercicio 1 (1.30p)	Ejercicio 2 (1.00p)	Ejercicio 3 (1.70p)	NOTA
Ejercicio 4 (2.00p)	Ejercicio 5 (2.00p)	Ejercicio 6 (2.00p)	

EJERCICIOS DE LÓGICA (4 puntos)

[1 . 30] **Ejercicio 1.** Formaliza e interpreta en lógica de proposiciones.

Considera las proposiciones **P**, **Q** y **R**, definidas como **P**: *hay tráfico*, **Q**: *llueve*, **R**: *el semáforo está verde*.

Considera estas expresiones:

E₁: Es cierto que hay tráfico y llueve a menos que el semáforo esté en verde.

E₂: Si hay tráfico, pero no llueve, entonces es falso que el semáforo esté en verde sólo si no llueve.

E₃: Es suficiente que no haya tráfico o lluvia para que el semáforo esté verde, es decir, al menos uno es cierto: hay tráfico o llueve o el semáforo no está verde.

A. (1 . 00) Escribe la fórmula bien formada para cada expresión **E_n**, e indica cuál es su conectiva principal.

B. (0 . 30) Indica si **I₁** = { **P**: *v*; **Q**: *v*; **R**: *v* }, **I₂** = { **P**: *F*; **Q**: *v*; **R**: *F* } son interpretaciones modelo o contramodelo.

SOLUCIÓN

A: **E₁**: $\neg(P \wedge Q) \supset R$. Su conectiva principal es $\supset$, porque es la que determina su valor de verdad

E₂: $P \wedge \neg Q \supset \neg(R \supset \neg Q)$. Su conectiva principal es $\supset$, porque es la que determina su valor de verdad.

E₃: $\neg(P \vee Q) \supset R = P \vee Q \vee \neg R$. Su conectiva principal es $\vee$, porque es la que determina su valor de verdad.

B: Para **I₁** = { **P**: *v*, **Q**: *v*, **R**: *v* }

- **E₁**: $\neg(P \wedge Q) \supset R$; $F \supset V$; V Por tanto, la interpretación **I₁** es **modelo** de la fórmula **fbf_E1**, pues la hace verdadera.
- **E₂**: $P \wedge \neg Q \supset \neg(R \supset \neg Q)$; $F \supset V$; V Por tanto, la interpretación **I₁** es **modelo** de la fórmula **fbf_E2**, pues la hace verdadera.
- $\neg(P \vee Q) \supset R = P \vee Q \vee \neg R$; $F \supset V = V$; $V = V$; Por tanto, la interpretación **I₁** es **modelo** de la fórmula **fbf_E3**, pues la hace verdadera.

Para **I₂** = { **P**: *f*, **Q**: *v*, **R**: *f* }

- $\neg(P \wedge Q) \supset R$; $V \supset F$; F ; Por tanto, la interpretación **I₂** es **contramodelo** de la fórmula **fbf_E1**, pues la hace falsa.
- **E₂**: $P \wedge \neg Q \supset \neg(R \supset \neg Q)$; $F \supset F$; V ; Por tanto, la interpretación **I₂** es **modelo** de la fórmula **fbf_E2**, pues la hace verdadera.
- **E₃**: $\neg(P \vee Q) \supset R = P \vee Q \vee \neg R$; $F \supset F = V$; $V = V$ Por tanto, la interpretación **I₂** es **modelo** de la fórmula **fbf_E3**, pues la hace verdadera.

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

[1.00] **Ejercicio 2.** Estudiamos un razonamiento $R : P_1, P_2 \implies Q$ y obtenemos esta tabla de verdad:

	P_1	P_2	Q
1	F	V	F
2	F	F	F
3	V	F	F
4	V	V	V

- A. (0.40) A nivel teórico, ¿Qué es un **contraejemplo**?
- B. (0.15) ¿Existe contraejemplo para R ? Si existe, indícalo.
- C. (0.25) ¿Es válido R ? ¿Por qué?
- D. (0.20) **Supón** que $fbf - R : P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow Q)$ es semánticamente **contingente**. ¿Cierto o falso...?
- R es válido para las interpretaciones modelo de $fbf - R$ y no es válido para las contramodelo.
 - R no es válido por ser contingente $fbf - R$.

SOLUCIÓN

- A. Una interpretación contraejemplo de un argumento es una interpretación que hace las premisas ciertas y la conclusión falsa. Si existe, afecta al razonamiento pues lo hace no válido.
- B. No, no existe contraejemplo ya que no existe una interpretación que haga las premisas verdaderas y la conclusión falsa
- C. R es válido ya que no existe un contraejemplo del mismo.
- D. a) Falso, con que haya un contraejemplo el razonamiento no es válido
b) Verdadero. Si la fbf asociada a un razonamiento R es contingente, admite al menos una interpretación contraejemplo, por lo que no sería válido. Un razonamiento es válido si y sólo si su fórmula asociada es una tautología. ya que una tautología no admite ninguna interpretación contraejemplo.

[1.70] **Ejercicio 3.** Realiza estas deducciones naturales siguiendo las estrategias propuestas.

- A. (0.80) Estrategia: **Prueba por casos** $Q : A \vee B$

-1	$D \vee C$	Premisa
-2	$D \rightarrow A$	Premisa
-3	$C \rightarrow B$	Premisa

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

SOLUCIÓN

	Fórmula	Regla aplicada	Supuesto (Apertura/Cierre)
-1	$D \vee C$	Premisa	
-2	$D \rightarrow A$	Premisa	
-3	$C \rightarrow B$	Premisa	
4	D		Supuesto 1
5	A	$MP\ 2, 4$	
6	$A \vee B$	$ID\ 5$	Cierre Supuesto 1
7	C		Supuesto 2
8	B	$MP\ 3, 7$	
9	$A \vee B$	$ID\ 8$	Cierre Supuesto 2
10	$A \vee B$	$ED\ 1, 4 - 6, 7 - 9$	

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

B (0.70) Estrategia: **Prueba directa**

$$Q : \neg C \rightarrow D$$

-1	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	Premisa
-2	$A \rightarrow C$	Premisa
-3	$B \rightarrow D$	Premisa

SOLUCIÓN

	Fórmula	Regla aplicada	Supuesto (Apertura/Cierre)
-1	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	Premisa	
-2	$A \rightarrow C$	Premisa	
-3	$B \rightarrow D$	Premisa	
4	$\neg C$		Supuesto
5	$\neg A$	MT 2, 4	
6	$A \vee B$	EC 1	
7	B	SD 5, 6	
8	D	MP 3, 7	
9	$\neg C \rightarrow D$	TD 4 – 8	

c) (0.20) ¿ En **qué regla** se basa cada una de las 2 estrategias anteriores ?

SOLUCIÓN

El problema A se basa en la regla Eliminación del Disyuntor (ED) o Prueba por Casos (Cas).

El problema B se basa en la regla Teorema de Deducción (TD) o Introducción del Implicador (II)

Alumn@		Profesor
DNI		

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA (6 puntos)

[2.00] **Ejercicio 4.**

4.1. (0.80) Sean las siguientes matrices M y O :

$$M = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -p \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} q & 0 & -1 \\ 1 & q & 1 \end{bmatrix} \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

A. ¿Es posible $M \cdot O = O \cdot M$? Justifica tu respuesta.

B. Calcula p y q para que $S = O \cdot M$ tenga ceros en la diagonal principal. Calcula S .

4.2. (1.20) Sea la siguiente matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } p \in \mathbb{R}.$$

A. Escribe las **matrices elementales** E_n para calcular la forma reducida de A . Explica tu respuesta.

B. Demuestra, haciendo los cálculos, que obtienes la forma reducida de A utilizando tus matrices E_n .

C. ¿**Conmuta** A con alguna de las matrices E_n ? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN

4.1.A No es posible ya que $M \cdot O$ tiene una dimensión de 3×3 y $O \cdot M$ tiene una dimensión de 2×2 , por tanto no pueden ser iguales.

4.1.B $S = O \cdot M = \begin{bmatrix} qp & 2q + p \\ p + q & 2 - p \end{bmatrix}$ Igualando el cuarto elemento, $2 - p = 0$, $p = 2$.
Igualando el primer elemento, $qp = 0$; $2q = 0$; $q = 0$

4.2.A Para calcular la matriz reducida de A habrá que convertir el 2 en un uno principal y luego realizar la operación necesaria para eliminar el elemento en la posición (1,3). Por tanto las operaciones elementales asociadas a las matrices reducidas serán E_1 : $F_1 \leftarrow F_1/2$; E_2 : $F_1 \leftarrow F_1 + p/2 F_3$, y por tanto las matrices elementales son:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

4.2.B

$$I = E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.C

A y E1: $AE_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por tanto no conmutan

A y E2: $AE_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por tanto tampoco conmutan

[2.00] Ejercicio 5.

5.1. (1.00) Dado,

$$U = \{(p, q, r) / p = q \cdot r\} \text{ con } p, q, r \in \mathbb{R}$$

Demuestra si U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

5.2. (1.00) Dados,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad x = (2, -2, 1, -1), y = (3, 6, 9), z = (2, -2)$$

¿Pertenecen x, y, z a los subespacios **Fila**, **Columna** y **Nulo** de A ? Haz los cálculos y justifica tus respuestas.

SOLUCIÓN

5.1. Para que U sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, debe cumplir las siguientes propiedades:

- El vector nulo pertenece a U , $0 \in S$
 - $\alpha u \in S, \forall u \in S, \alpha \in \mathbb{R}$
 - $u + v \in S, \forall u, v \in S$
- a) $(0, 0, 0) \in S$ ya que si $c = 0 = a \cdot b = 0 \cdot 0$, luego el vector nulo pertenece a S

Alumn@ DNI		Profesor
---------------	--	----------

b) Sea $u = (a, b, c) \in S$, hay que demostrar que $\alpha u \in S$

$$\alpha u = \alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

Hay que demostrar que $\alpha c = \alpha a \cdot \alpha b$, es decir, $\alpha c = \alpha^2 ab$

En general, no se puede asegurar que $\alpha c = \alpha^2 ab$ porque por ejemplo tomando $(1, 1, 1) \in S // 1 = 1 \cdot 1 //$ y $\alpha = 2$ entonces $2 \cdot (1, 1, 1) = (2, 2, 2)$ que no pertenece a S , pues $2 \neq 2 \cdot 2$

Es decir, se pueden encontrar muchos ejemplos de vectores (a, b, c) pertenecientes a S y escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que $\alpha(a, b, c)$ no pertenezca a S .

Por tanto, S **NO** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

c) También, la suma de vectores no se cumple en general, pues se pueden encontrar muchos ejemplos de vectores (a, b, c) y (d, e, f) pertenecientes a S de forma que $(a, b, c) + (d, e, f)$ no pertenezca a S .

Por ejemplo, $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 4) \in S$, pero su suma $(3, 3, 5)$ no.

Por tanto, S **NO** es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

5.2.

❖ Subespacio Fila

Las filas de A consideradas como 4 vectores de $\mathbb{R}^2$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^2$ llamado Subespacio fila de A (Fil A).

Una base de Fil A está formada por las filas de A que en su reducida tiene 1's principales.

Por tanto, hay que obtener la reducida de A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} F1 \leftarrow F1/2 \\ F2 \leftarrow -F2/2 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} F3 \leftarrow F3 + 2F1 \\ F4 \leftarrow F4 - 3F2 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las filas de A que tienen un 1 principal en su reducida son las filas 1 y 2.

Así, $\text{Fil } A = \text{Env}\{(2,0), (0, -2)\}$; x y y no pertenecen a $\text{Fil } A$ porque no pertenecen a $\mathbb{R}^2$.

$x=(2,-2)$ pertenece a Fil A porque sí se puede obtener como combinación lineal de $(2,0)$ y $(0, -2)$ ya que $(2,-2) = 1 \cdot (2,0) + 1 \cdot (0,-2)$

Alumn@		Profesor
DNI		

❖ Subespacio Columna

Una base de Col A está formada por las columnas de A que en su reducida tiene 1's principales. Del resultado de $\text{rref}(A)$ obtenido anteriormente, se deduce que las columnas que tienen un 1 principal en la reducida de A son las columnas 1 y 2.

Así, $\text{Col}A = \text{Env}\{(2,0,-2,0), (0, -2, 0, 3)\}$. Los vectores y y z no pueden pertenecer al espacio ColA ya que no pertenecen a $\mathbb{R}^4$. Para saber si el vector x pertenece al subespacio columna, planteamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

que es compatible indeterminado. De la primera fila se deduce que $a = 1$, de la tercera, que $a = -1/2$, llegándose a una contradicción. (Otra manera es hacer operaciones por filas hasta llegar a una fila de la forma $(0,0,a)$, con a distinto de cero, a la cual se puede llegar de manera trivial).

❖ Subespacio Nulo

El subespacio Nulo de A coincide con el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo $Ax=0$, donde los x son vectores $\in \mathbb{R}^2$.

Del resultado de $\text{rref}(A)$ obtenido anteriormente, se deduce que el sistema de ecuaciones equivalente no tiene parámetros, ya que las 2 columnas de A tienen un 1 principal.

Así, el sistema equivalente es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el único vector solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es $(0, 0)$

$$\text{Así, } \text{Nul } A = \text{Env}\{(0, 0)\}$$

x,y quedan descartados porque no pertenecen a $\mathbb{R}^2$.

El vector $z = (2,-2)$ tampoco pertenece a $\text{Nul } A$ pues no se puede poner como combinación lineal del vector $(0, 0)$.

Alumn@		Profesor
DNI		

[2.00] **Ejercicio 6.** Sea la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 3 & 0 & q \end{bmatrix} \text{ con } p, q \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (2, 0, 1)$ son vectores propios de M .

6.1. (0.40) ¿Qué es un vector propio? Da la definición matemática y explícala.

6.2. (0.40) Calcula p y q sabiendo que la traza de M es 3 y usando la definición de vector propio. Justifica.

6.3. (0.20) Calcula los valores propios de M y sus multiplicidades algebraicas.

6.4. (1.00) Calcula el subespacio propio asociado al valor propio mayor, determina su multiplicidad geométrica y pon un ejemplo de vector propio asociado. Explica todos los pasos que realices y comprueba los resultados que obtengas

SOLUCIÓN

6.1 Un vector propio es aquel que cumple la ecuación $M \cdot x = \lambda x$, es decir, al realizar la multiplicación de la matriz por el vector, este puede cambiar de módulo, pero no de dirección.

6.2. Si la traza de M es 3,

$$3 + p + q = 3 ; p + q = 0$$

Si $u_2 = (2, 0, 1)$ es un vector propio de M , entonces:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 3 & 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 + q \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que $6 = 2 \cdot \lambda_2$, se deduce que $\lambda_2 = 3$; de la última ecuación se deduce que $6 + q = \lambda_2$; por tanto $q = 3 - 6 = -3$; finalmente, como $p + q = 0$, $p = 3$.

$p = 3$, $q = -3$

6.3 Si $u_1 = (0, 0, 1)$ es un vector propio de M , entonces, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 3 & 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, de donde se deduce que $\lambda_1 = q$, es decir, $\lambda_1 = -3$

Por ser M una matriz de dimensiones 3×3 , tiene 3 autovalores, luego falta por obtener λ_3 . Para ello, si consideramos la propiedad de que la traza de la matriz M es igual a la suma de sus autovalores, entonces, con lo que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$; teniendo en cuenta los valores anteriormente calculados, **$\lambda_3 = 3$**

Por tanto los valores propios de M son:

$\lambda_1 = 3$, multiplicidad algebraica: 2

$\lambda_2 = -3$, multiplicidad algebraica: 1

Alumn@		Profesor
DNI		

6.4.

El valor propio mayor de los 3 es $\lambda = 3$.

Así, el subespacio propio asociado a $\lambda = 3$, $E_A(3) = \text{Nul}(A - 3I)$

$$\text{Nul}(A - 3I) = \{x/x \in \mathbb{R}^n, (A - 3I)x = 0\}$$

De esta forma, hay que calcular las soluciones del sistema homogéneo $(A - 3I)x = 0$.

La matriz asociada a dicho sistema es:

$$M - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}; \text{rref}(M - 3I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema asociado:

$$x_1 = 2x_3$$

x_2 parámetro

x_3 parámetro

Así, las soluciones del sistema tienen la forma $\alpha(2,0,1) + \beta(0,1,0)$

Por tanto el subespacio propio asociado a $\lambda = 3$ será $\text{Env}\{(2,0,1), (0,1,0)\}$ y su multiplicidad geométrica, es decir, el número de vectores en la base del espacio, será de 2. $\text{mg}(3) = 2$.

Para comprobar el resultado con el autovector $(2,0,1)$, aplicamos la expresión $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para comprobar el resultado con el autovector $(0,1,0)$, aplicamos la expresión $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que queda demostrado para los dos vectores de la base.