Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CUADERNILLO DE LÓGICA

Teoría y ejercicios relacionados con el estudio de la validez de razonamientos deductivos en el contexto del sistema formal de la lógica proposicional

Tema1: Razonar con Lógica de Primer Orden

- Razonamientos lógicos.
- El sistema formal de la Lógica de primer orden.
- Otros sistemas lógicos en informática.

Tema2: Formalización de razonamientos con el lenguaje lógico

- Lenguaje proposicional y predicativo (éste lo veremos en prácticas).
- Obtención de fórmulas y estructuras lógicas.

Tema3: Semántica lógica.

- Interpretación de fórmulas lógicas.
- Tautologías.
- Interpretación de estructuras lógicas usando Tablas de Verdad y el Método del Contraejemplo.

Tema4: Deducción Natural

- Deducción de fórmulas lógicas usando reglas de inferencia.
- Estrategias para hacer deducciones. Subdeducciones.

Tema1: RAZONAR CON LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Los humanos adquirimos conocimiento, tanto objetivo como subjetivo, por observación o por deducción y lo almacenamos en nuestro cerebro. Con esto tenemos la posibilidad de razonar o inferir conocimiento a partir del que conocemos, es decir, podemos construir razonamientos.
La Lógica de primer Orden considerado el sistema formal más importante para representar conocimiento nos permitirá realizar razonamientos correctos de manera rigurosa y formal.

Razonamientos lógicos T1-Log

En sentido amplio se entiende por razonamiento a la facultad humana que permite resolver problemas en los cuales a partir de conectar un conjunto de hechos se extraen otros que se conocen como conclusiones. A la expresión verbal, oral o escrita de un razonamiento se le conoce como argumento.

- ***Nos centraremos en el estudio de los razonamientos lógicos.***

Razonamiento lógico: proceso cognitivo por medio del cual a partir de premisas y por aplicación de reglas se infiere o deduce una conclusión. Las premisas son los hechos que describen el conocimiento conocido y la conclusión es el conocimiento que se obtiene a partir de ellas.

Su esquema general es: $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ donde $P = \{ P_1, P_2, \ldots P_n \}$,

siendo Pi las premisas, Q la conclusión y $\Rightarrow$ el símbolo deductor.

Razonamiento lógico deductivo: a partir de unas premisas se alcanza una conclusión que <u>necesariamente</u> se sigue de ellas. La obtención de la conclusión se hace a través de un proceso deductivo llamado deducción que consiste en "desmontar" las premisas consiguiendo información contenida en ellas. El filósofo griego Aristóteles (siglo IV a.C.) fue el primero en establecer los principios formales de este tipo de razonamientos a través de sus famosos silogismos como el siguiente: P_1: Todos los hombres son mortales. P_2: Sócrates es un hombre. Q: Sócrates es mortal.
Estas argumentaciones juegan un papel muy importante en matemáticas y en problemas de computación para el desarrollo de sistemas inteligentes y verificación de programas.

Razonamiento lógico inductivo: se acepta como válido un principio general (conclusión) en base de unas experiencias específicas (premisas), i.e., la conclusión se infiere "probablemente" de las premisas. Estas argumentaciones juegan un papel importante en disciplinas con mayor contenido empírico, como la física, la biología, etc. Un ejemplo de un razonamiento inductivo sería:
P_1: El árbol 1 es un pino. P_2: El árbol 2 es un pino y el árbol 3 también. Q: Todos los árboles son pinos.

- ***Estudiaremos los razonamientos lógicos deductivos*** *(a partir de ahora sólo diremos razonamiento).*

El sistema formal de la Lógica de Primer Orden (lpo) T1-Log

La Lógica de Primer Orden es la ciencia que estudia las reglas que permiten demostrar la validez de los razonamientos. Le concierne el análisis y la codificación de los mismos ya que se interesa por la estructura y la transformación de los enunciados que lo definen. Cuenta con un lenguaje artificial, con modelos matemáticos para dar significado a los enunciados y con un cálculo basado en reglas de inferencia[1] que permiten demostrar mecánicamente la validez de los razonamientos. Considera, para ello, dos niveles de abstracción o representación, el proposicional y el predicativo. El primero da lugar a lo que se conoce como lógica proposicional y el segundo como lógica predicativa o lógica de predicados de primer orden.

En el nivel proposicional el estudio se realiza teniendo en cuenta las posibles conexiones entre los hechos o proposiciones que definen el problema. Por esto su unidad básica es la proposición atómica o enunciado simple no conectado a ningún otro. En el nivel predicativo la lógica trabaja con las propiedades y relaciones entre los objetos o sujetos que aparecen en el enunciado, es decir, distingue "qué se afirma" (predicado) y "de quién se afirma" (sujeto).

- ⇨ ***Stop:*** *En lo sucesivo tendremos en cuenta el concepto de proposición, como el enunciado que, independientemente de su contenido, es susceptible de ser verdadero o falso. Por ejemplo, "Madrid es la capital de España" es un hecho cierto, pero considerándolo como una proposición para su tratamiento lógico, será un enunciado que puede ser cierto o falso. En el cálculo lógico que desarrollaremos no se tendrá en cuenta el conocimiento empírico de los hechos que describen el problema sino su estructura o "forma lógica".*

Cada categoría desarrolla un cálculo basado en la inferencia de nuevo conocimiento a partir de la declaración de un lenguaje, una semántica y un proceso deductivo. El lenguaje permite obtener la estructura lógica del razonamiento; la semántica, determinar su validez aplicando métodos semánticos (veremos tablas de verdad y método del contraejemplo) y la deducción, la inferencia de nuevo conocimiento a partir del que ya se conoce aplicando reglas de inferencia.

Diremos que un razonamiento es válido cuando la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas. Este concepto se entiende, según el punto de vista semántico o sintáctico, como:

Semántico: relación condicional entre premisas y conclusión que establece que si las premisas son verdaderas entonces la conclusión también lo es. No es necesario que todas las premisas o la conclusión sean ciertas.

Los siguientes ejemplos muestran dos razonamientos válidos.

Raz1: P1: Si es lunes no es martes, P2: Es lunes, Q: No es martes. Aceptando las premisas como verdaderas, la conclusión también lo es (Raz1, sigue el mismo esquema que la regla MP que es un razonamiento propuesto por la lógica como válido).

Raz2: P1: Si es lunes, no es martes, P2: Es lunes y no es lunes. Q: Es martes.

La premisa P2 es falsa, es una contradicción. Según la regla ECQ el razonamiento es válido.

- *Tablas de verdad y método del contraejemplo*

Sintáctico: se aplicarán reglas de inferencia lógicas a las premisas para construir una deducción o derivación por la que se obtenga la conclusión.

- *Deducción Natural y Automática.*

[1] Razonamiento propuesto por el sistema cuya validez ha sido comprobada (ver hoja de reglas).

<table>
<tr><th>Razonamiento válido</th><th>Razonamiento no válido</th></tr>
<tr><td colspan="2">P1, P2,… Pn $\Rightarrow$ Q</td></tr>
<tr><td>Si todas las Pi son verdaderas y Q es verdadera</td><td rowspan="3">Si todas las Pi son verdaderas y Q es falsa</td></tr>
<tr><td>Si al menos una Pi es falsa y Q verdadera</td></tr>
<tr><td>Si al menos una Pi es falsa y Q es falsa</td></tr>
</table>

- Se debe demostrar la validez de la estructura lógica del problema de razonamiento no la información que aporte.
- Se aplicarán métodos semánticos para determinar si siempre que las premisas son ciertas la conclusión también lo es. Por ello sólo interesa probar que la verdad de la conclusión se deduce de la verdad de las premisas.
- Si se demuestra que siendo las premisas ciertas la conclusión es falsa, entonces el razonamiento no es correcto.
- Una conclusión no se ve modificada por la aportación de nuevas premisas al problema (monotonía en lpo).

Tema2-Log: FORMALIZACIÓN DE RAZONAMIENTOS CON EL LENGUAJE LÓGICO

La formalización corresponde al Paso 1 del cálculo lógico y permite obtener la estructura lógica de un problema de razonamiento a partir de la definición del lenguaje formal. Primero se presenta el lenguaje proposicional y a continuación el predicativo.

Tendremos en cuenta que Formalizar proposiciones con el lenguaje lógico consiste en escribirlas con los símbolos propios del lenguaje para obtener fórmulas lógicas (fbf). En el nivel proposicional las proposiciones atómicas se formalizan con variables proposicionales y en el nivel predicativo de primer orden con predicados de n-argumentos. En un conjunto, llamado marco conceptual (MC), escribiremos los elementos del lenguaje seleccionados para formalizar las proposiciones.

Lenguaje Proposicional: Simboliza las proposiciones atómicas con símbolos llamados variables proposicionales y las conexiones entre ellas con símbolos llamados conectivas.

Alfabeto:

Variable proposicional: expresión formada por letras y/o números que formaliza proposiciones atómicas.

Ej: a, b, A, B, A1,… (cualquier identificador formado por letras, números,…).

Conectivas: Sean A y B proposiciones:

	Símbolo	Esquema	Formalización
Negación	$\neg$	no A, es falso A, no es cierto A,…	$\neg$A
Conjunción	$\wedge$	A y B, A pero B, A aunque B,…	A $\wedge$ B
Disyunción	$\vee$	A o B, al menos uno de ellos,…	A $\vee$ B
Implicador o Condicional	$\rightarrow$	Si A entonces B A es suficiente para B	A $\rightarrow$ B

		B es necesario para A A sólo si B No A a menos que B	
Bicondicional	$\leftrightarrow$	A si y sólo si B A es necesario y suficiente para B,…	$A \leftrightarrow B$

Lenguaje Predicativo de primer orden: Conjunto de símbolos que permiten simbolizar las propiedades (acciones, cualidades) de sujetos y las relaciones entre sujetos. El conjunto de sujetos que intervienen en un problema se conoce como universo o dominio de discurso (D) de dicho problema. Las propiedades y relaciones de sujetos se formalizan con identificadores llamados predicados y los sujetos con identificadores que son los argumentos de los predicados.

- **Predicado**: Partícula de la proposición que define las propiedades y relaciones entre sujetos. Se formaliza con un identificador (letra(s)) y con términos encerrados entre paréntesis a los que llamaremos argumentos que serán los sujetos afectados por dicho predicado. Los argumentos pueden ser: constantes o variables. **Ej**: P(ana), "P" es el predicado que afecta al argumento "ana", se dice que "ana" tiene la propiedad P. La aridad de un predicado es el número de argumentos que tiene.

- **Argumentos**:

  Constante: Identifican a sujetos concretos de la proposición. Se escriben con letras en minúscula: a, b…

  Variable: Identifican a sujetos constantes referidos al conjunto de referencia. Se usan letras: x, y, z….

  Suelen estar afectados por un cuantificador.

  Toda cadena de símbolos constante o variable es un término.

- **Término**

  Un término es una cadena de símbolos constante o variable (también pueden ser funciones).

- **Átomo**

  Un átomo es una cadena de símbolos de la forma P(t1,…tn), siendo P predicado de aridad *n* y ti (i=1,…n) términos.

- **Cuantificadores**: símbolos que acompañan a variables que son argumentos de predicados.

  Universal ($\forall$):indica que todos los sujetos del dominio verifican dicho predicado.

  Existencial ($\exists$): indica que algunos sujetos del dominio verifican dicho predicado.

- **Ámbito de cuantificación**

  En una expresión $\forall x(A)$, x es la variable cuantificada y la fbf A es el ámbito de cuantificación (idem $\exists x(A)$).

  Se dice que la variable x está ligada.

  Ej: $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$, x ligada en el ámbito de la fbf : $P(x) \rightarrow Q(x)$, $x \in D$.

Alfabeto del lenguaje de predicados de primer orden

Alfabeto proposicional + símbolos de:

- Predicados: P(Arg1,…Argn)
- Arg constantes: a,b,c…

- Arg variables: x,y,z…
- Cuantificador universal: $\forall$
- Cuantificador universal: $\exists$.

- **Predicado de propiedad con sujeto constante** :

  Cualidad, atributo que afecta e identifica a un sujeto (pueden ser varios).

  Ej: P1: "Luis es guapo".

  Predicado de propiedad: es guapo.

  Término constante: Luis.

  Formalización: MC={Gu(x): x es guapo}

  Fbf-P1: Gu(luis)

  Fbf-P1 es una fbf atómica del lenguaje de predicados.

  Ej: P2: "Luis y Juan son guapos".

  Términos constantes: Luis, Juan.

  Fbf-P2: Gu(luis) $\wedge$ Gu(juan).

  Fbf-P2 es una fbf molecular del lenguaje de predicados.

- **Predicado de propiedad con sujeto variable:**

  Cualidad que se le atribuye a un conjunto de sujetos de un dominio D (deben estar definidos).

  Ej: P3:"Todos son guapos".

  Término variable: x, x $\in$D; D= {alumnosUA}

  Cuantificador para x: $\forall$.

  Fbf-P3: $\forall$x Gu(x).

  Fbf-P3 es una fbf del lenguaje de predicados:

  - Atómica si card(D) = 1 (card(D): número de elementos de D).
  - Molecular si card(D) > 1.

- **Predicado de relación con sujetos constantes:**

  Relación entre varios sujetos.

  Ej: P4: "Luis es novio de María".

  Predicado de relación: es novio.

  Términos constantes: Luis, María.

  Formalización: MC = {Nov(x,y): x es novio de y}.

  Fbf-P4: Nov(luis, maria).

  Fbf-P4 es una fbf atómica del lenguaje de predicados.

  Ej: P5: "Luis es novio de María y de Ana".

Términos constantes: Luis, María, Ana.

Fbf-P5: Nov(luis, maria) $\wedge$ Nov(luis,ana).

Fbf-P5 es una fbf molecular del lenguaje de predicados.

- **Predicado de relación con sujetos constantes y/o variables:**

Relación entre varios sujetos.

Ej: P6: "Luis es novio de alguien".

Término constante: Luis.

Término variable: x, x $\in$D.

Fbf-P6: $\exists$x Nov(luis, x).

Fbf-P6 es una fbf del lenguaje de predicados:

- Atómica si card(D) = 1 (card(D): número de elementos de D).
- Molecular si card(D) > 1.

Ej: P7: "Todos son novios de María".

Término constante: María.

Término variable: x, x $\in$D.

Fbf-P7: $\forall$x Nov(x, maria).

Fbf-P7 es una fbf del lenguaje de predicados:

- Atómica si card(D) = 1 (card(D): número de elementos de D).
- Molecular si card(D) > 1.

Ej: P8: "Todos los que son novios de María lo son de Ana".

Fbf-P8: $\forall$x [Nov(x, maria) $\rightarrow$ Nov(x, ana)].

Término constante: María, Ana.

Término variable: x, x $\in$D.

Fbf-P8 es una fbf del lenguaje molecular.

- **REGLAS SINTÁCTICAS:**

- Toda variable proposicional es una fórmula lógica bien formada (escribiremos fbf).
- Todo átomo es una fbf.
- Si A y B son fbfs entonces $\neg$A, A $\wedge$ B, A $\vee$ B, A $\rightarrow$ B, A $\leftrightarrow$ B también son fbfs.
- Si A es fbf y x una variable, entonces, $\forall$x(A), $\exists$x(A) son fbf.
- Prioridad en conectivas: 1º: $\neg$; 2º: $\wedge$, $\vee$; 3º: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Una fbf se define por la conectiva de mayor jerarquía.

- **PASOS PARA FORMALIZAR:**

1- Elegir nivel de formalización.
2- En cada proposición detectar las proposiciones atómicas y las posibles conexiones entre ellas.
3- Para el lenguaje de proposiciones elegir un identificador de variable proposicional para cada proposición atómica diferente. Escribir en el conjunto llamado marco conceptual (MC) la declaración las variables junto con breve enunciado de la proposición que formalizan.
4- Si el nivel de formalización es el predicativo, detectar predicados, sujetos, conectivas y cuantificadores. Escribir en MC sólo la declaración de predicados.
5- Formalizar proposiciones teniendo en cuenta la prioridad de las conectivas y cuantificadores.
6- Cada fórmula lógica de la proposición P la denotaremos por Fbf-P.
7- Mostrar la estructura lógica del razonamiento usando el deductor ($\Longrightarrow$) para separar las fórmulas premisas de la fórmula conclusión.

- **EQUIVALENCIAS LÓGICAS:** Cualquier fbf se puede escribir de forma equivalente usando reglas de equivalencia. (ver hoja de reglas)

Reglas de equivalencia para el condicional:

$A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B$ (DI$\vee$) $\Leftrightarrow$ $\neg(A \wedge \neg B)$ (DI$\wedge$) $\Leftrightarrow$ $\neg B \rightarrow \neg A$ (Contrapositivo)

Ej: "Si cantas, bailas" $\Leftrightarrow$ "O no cantas o bailas" $\Leftrightarrow$ "Es falso que cantes y no bailes" $\Leftrightarrow$ "Si no bailas, no cantas.

El negador, conjunción y disyunción se relacionan con las leyes de De Morgan:

$\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$; **Ej:** "O no estás contento o no bailas" $\Leftrightarrow$ "Es falso que estés contento y que bailes".

$\neg A \wedge \neg B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$; **Ej:** "Ni estás contento ni bailas" $\Leftrightarrow$ "Es falso que estés contento o que bailes"

Regla de equivalencia para el bicondicional: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (ECO)

Ej: "Cantas si, y sólo si, bailas" $\Leftrightarrow$ "Si cantas, bailas y si bailas, cantas".

EJERCICIO 1 **Formaliza** con el lenguaje de **proposiciones** las expresiones propuestas, donde A, B, C y D formalizan proposiciones atómicas. Indica en cada fórmula cuál es la conectiva principal (CP).

1. **A y B**.

CP: $\wedge$	Fbf: $A \wedge B$

2. **Dadas A y B, al menos una de ellas es cierta**.

CP: $\vee$	Fbf: $A \vee B$

3. **Es cierto A y B, pero falso C.**

CP: $\wedge$	Fbf: $A \wedge B \wedge \neg C$

4. **Es cierto A, aunque no lo es B, ni C ni D**.

CP: $\wedge$	Fbf: $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

5. **O es cierto A y B, o es falso, C y D**.

CP: $\vee$	Fbf: $(A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)$

6. **Si es cierto A, también lo es B, pero no C** $\equiv$ **Es suficiente A para que sea B y no C**.

CP: $\rightarrow$	Fbf: $A \rightarrow B \wedge \neg C$

7. **Sólo si es cierto A o B, lo es C y D** $\equiv$ **Es necesario A o B para que sea C y D.**

CP: $\rightarrow$	Fbf: $C \wedge D \rightarrow A \vee B$

8. **Es cierto A a menos que sea falso B** $\equiv$ **Si B entonces A** $\equiv$ **Sólo si no B, no A.**

CP: $\rightarrow$	Fbf: $\neg A \rightarrow \neg B$

9. **A menos que sea cierto B, es falso A, pero cierto C** $\equiv$ **Si no B entonces no A y C.**

CP: $\rightarrow$	Fbf: $\neg(\neg A \wedge C) \rightarrow B$

10. **Si es cierto A y B, no lo es C ni D** $\equiv$ **Es suficiente A y B para que sea no C y no D.**

CP: $\rightarrow$	Fbf: $A \wedge B \rightarrow \neg C \wedge \neg D$

11. **Sólo si es falso A o falso B, pero cierto D, entonces es cierto B**

CP: $\rightarrow$	Fbf: $B \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \wedge D$

12. A menos que sea cierto B, no lo es A, pero sí lo es C.

CP: $\rightarrow$	Fbf: $\neg(\neg A \wedge C) \rightarrow B$

13. No es suficiente, pero sí necesario, que sea cierto A o B para que sea cierto C.

CP: $\wedge$	Fbf: $\neg(A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A \vee B)$

14. No es necesario que sea falso B, pero cierto C, para que sea cierto A.

CP: $\neg$	Fbf: $\neg(A \rightarrow \neg B \wedge C)$

15. Si es cierto A y B entonces, si no es cierto C, pero sí lo es D tenemos que es falso A o es falso B.

CP: $\rightarrow$	Fbf: $A \wedge B \rightarrow (\neg C \wedge D \rightarrow \neg A \vee \neg B)$

16. Es suficiente que sea cierto A para que lo sea B, sin embargo, es cierto C si, y sólo si, es falso A.

CP: $\rightarrow$	Fbf: $(A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg A)$

17. A menos que sea cierto B o falso C, es cierto A, pero es necesario y suficiente que sea cierto D y B para que sea falso A.

CP: $\wedge$	Fbf: $(\neg A \rightarrow B \vee \neg C) \wedge (D \wedge B \leftrightarrow \neg A)$

18. No es cierto A y B a menos que sea cierto B, pero falso A, aunque o es falso B y cierto A, o es falso A, pero cierto B.

CP: $\wedge$	Fbf: $(A \wedge B \rightarrow B \wedge \neg A) \wedge ((\neg B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B))$

19. No es cierto A y B a menos que sea cierto B, pero falso A, aunque o es falso B y cierto A, o es falso A, pero cierto B.

CP: $\wedge$	Fbf: $(A \wedge B \rightarrow B \wedge \neg A) \wedge ((\neg B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B))$

20. No es cierto A o B sólo si es falso A y cierto B, pero para que sea cierto A y B es necesario y suficiente que no sea falso A ni B.

CP: $\wedge$	Fbf: $(\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge B) \wedge ((A \wedge B \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B))$

EJERCICIO 2 Con el siguiente conjunto de variables proposicionales o marco conceptual:

MC = { **ba**: bailo; **ca**: canto; **za**: necesito zapatillas; **gu**: necesito guitarra}

Para cada una de las fbfs propuestas (1,…,7) escribe una fbf equivalente usando las reglas de equivalencia (ver hoja de reglas). Después escribe los enunciados de ambas fbfs en **lenguaje natural** teniendo en cuenta MC.

1. $ba \wedge ca$
2. $ba \wedge ca \rightarrow za$
3. $ba \vee ca$
4. $ba \vee ca \rightarrow gu$
5. $(ba \rightarrow za) \wedge (ca \rightarrow gu)$
6. $ba \wedge ca \leftrightarrow za \vee gu$
7. $\neg(ba \vee ca) \rightarrow \neg gu$

Solución

1. $ba \wedge ca \Leftrightarrow \neg(\neg ba \vee \neg ca)$; se aplicó la regla de De Morgan.
   Bailo y canto ≡ Es falso que no baile o no cante.

2. $ba \wedge ca \rightarrow za \Leftrightarrow \neg(ba \wedge ca) \vee za$; se aplicó la regla (DI$\vee$).
   Si bailo y canto necesito zapatillas ≡ Es falso que baile y cante, o que necesite zapatillas.

3. $ba \vee ca \Leftrightarrow \neg ba \rightarrow ca$; se aplicó la regla (DI$\vee$).
   Bailo o canto ≡ Si no bailo entonces canto.

4. $ba \vee ca \rightarrow gu \Leftrightarrow \neg(ba \wedge ca) \vee ca$; se aplicó la regla (DI$\vee$).
   Es suficiente que cante o baile para que necesite guitarra ≡ Es falso que baile y cante, o que necesite zapatillas.

5. $(ba \rightarrow za) \wedge (ca \rightarrow gu) \Leftrightarrow (\neg ba \vee za) \wedge (\neg ca \vee gu)$; se aplicó 2 veces la regla (DI$\vee$).
   Si bailo necesito zapatillas y si canto necesito guitarra ≡ No bailo o necesito zapatillas, y no canto o necesito guitarra.

6. $(ba \wedge ca \leftrightarrow za \vee gu) \Leftrightarrow (ba \wedge ca \rightarrow za \vee gu) \wedge (za \vee gu \rightarrow ba \wedge ca)$; se aplicó la regla (ECO).
   Bailo y canto si, y sólo si, necesito zapatillas o guitarra ≡ Es suficiente que baile y cante para que necesite zapatillas o necesite guitarra, y es necesario que baile y cante para que necesite zapatillas o necesite guitarra.

7. $(\neg ba \wedge \neg ca \rightarrow \neg gu) \Leftrightarrow \neg(\neg ba \wedge \neg ca) \wedge gu)$; se aplicó la regla (DI$\wedge$).
   Si no bailo ni canto entonces no necesito guitarra ≡ No es cierto que no baile y no cante y necesite guitarra.

EJERCICIO 3 Para cada una de las siguientes proposiciones escribe cada una de las **proposiciones atómicas** que aparecen en los enunciados (escribe At-i:) e indica la conectiva que las conecta. **Formalízalas** en lenguaje proposicional.

1. Juan estudia y lee.
2. Ana es novia de Juan o de Miguel.
3. Si Ana estudia entonces es novia de Juan que estudia.
4. Sólo si Ana lee, no estudia ni es novia de Miguel.

Solución

1. At-1: Juan estudia; At-2: Juan lee; conectiva: conjunción "y".

   L. proposiciones: MC = { es: At-1; le: At-2}.

   Fbf-1: es $\wedge$ le.

2. At-1: Ana es novia de Juan; At-2: Ana es novia de Miguel; conectiva: disyunción "o".

   L. proposiciones: MC = { aj: At-1; am: At-2}.

   Fbf-2: aj $\wedge$ am.

3. At-1: Ana estudia; At-2: Ana es novia de Juan; At-3: Juan estudia;

   conectivas: implicador $\rightarrow$, conecta At-1 con At-2 y At-3.

   conjunción "y", conecta At-2 con At-3.

   L. proposiciones: MC = { es: At-1; aj: At-2; esj: Juan estudia}.

   Fbf-3: es $\rightarrow$ aj $\wedge$ esj.

4. At-1: Ana lee; At-2: Ana es novia de Miguel; At-3: Ana estudia;

   conectivas: implicador:$\rightarrow$, conecta At-1 con At-2 y At-3.

   conjunción "y", conecta At-2 con At-3.

   L. proposiciones: MC = { le: At-1; am: At-2; es: At-3}.

   Fbf-4: $\neg$es $\wedge$ $\neg$am $\rightarrow$ le.

En los siguientes ejercicios determina la **fbf equivalente** a la dada usando reglas de equivalencia (ver hoja de reglas).

EJERCICIO 4 Al simplificar la fbf**: ¬[¬(¬p ∨ q) → p] ∨ q,** se obtiene la fbf:

a) p ∨ ¬q

b) p ∧ q

c) ¬q

d) q

Solución de cómo obtener la opción correcta.

¬[¬(¬p ∨ q) → p] ∨ q	
¬[¬¬(¬p ∨ q) ∨ p] ∨ q	DI∨
¬[(¬p ∨ q) ∨ p] ∨ q	DN
¬(¬p ∨ q) ∧ ¬p) ∨ q	de Morgan
(¬¬p ∧ ¬q ∧ ¬p) ∨ q	de Morgan
(p ∧ ¬q ∧ ¬p) ∨ q	DN
F ∨ q	E6
q	E6

EJERCICIO 5 Al simplificar la fbf: **[(p ∧ ¬q) ∧ (q → p) ∧ r] ∨ p,** se obtiene la fbf:

a) p ∨ q

b) p ∧ q

c) p

d) ¬q

EJERCICIO 6 Al simplificar la fbf: **p ∧ [q ∨ (p → (¬p ∧ r))],** se obtiene la fbf:

a) p ∨ ¬q

b) p ∧ q

c) p

d) ¬p

EJERCICIO 7 Al simplificar la fbf: **[(¬p ∨ q) → (p ∧ q)] ∨ (¬p ∧ ¬q),** se obtiene la fbf:

a) ¬p ∨ q

b) ¬p ∧ q

c) p ∨ q

d) p ∨ ¬q

EJERCICIO 8 Al simplificar la fbf: **[¬(p → q) → ¬ (q → p)] ∧ (p ∨ q),** se obtiene:

a) p

b) q ∧ p

c) p ∨ q

d) p ∨ ¬q

EJERCICIO 9 Al simplificar la fbf: **p ∧ { [(¬p ∧ q) ∨ q] ∨ [¬q ∨ p] },** que se corresponde con el siguiente circuito, se obtiene el circuito equivalente:

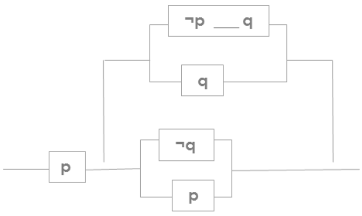
a) p

b) q

c) ¬p

d) p → q

e) ¬q



EJERCICIO 10 Al simplificar la fbf: **[(p→ q) → q] ∧ [¬p → (¬p → q)]** se obtiene la fbf:

a) p

b) q

c) p ∧ q

d) ¬p

e) p ∨ q

EJERCICIO 11 Al simplificar la fbf: **p ∧ { q ∨ [p → (¬p ∧ r)] }** se obtiene la fbf:

a) p ∧ q

b) q ∧ r

c) p ∧ q

d) q ∧ r

e) p

T3: SEMÁNTICA LÓGICA

Corresponde al Paso 2 del cálculo lógico. Se estudia la validez del razonamiento interpretando su estructura lógica. Se usarán Tablas de verdad y el Método del contraejemplo.

Sea **R: P1, P2,…Pn ⇒ Q** la estructura lógica de un razonamiento con **n** proposiciones premisas Pi (i=1,…,n) y una proposición conclusión Q.

R es **semánticamente válido** o, simplemente, **válido** o correcto, si se demuestra que siempre que las premisas Pi son verdaderas la conclusión Q también lo es. En un razonamiento válido se dice que la conclusión Q es **consecuencia lógica** de las premisas Pi.

Nos interesa estudiar si es posible interpretar todas las fbfs premisas con el valor V y si es así, comprobar cómo se interpreta la conclusión. Para ello consideramos:

- Toda proposición se **interpreta** como verdadera (V) o falsa (F). Valores de verdad de la lógica bivalente.
- **Axioma de bivalencia** o tercero excluso”: **“Toda proposición es cierta o falsa, pero no ambas cosas”**.
- El valor de verdad de una fbf molecular dependerá de su estructura lógica que vendrá dada por su conectiva principal.
- El valor de verdad de una fbf molecular se obtiene aplicando las **reglas semánticas** que aparecen en la siguiente tabla, llamada **tabla de verdad**:

A	B	¬A	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B
V	V	F	V	V	V	V
	F		F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
	F		F	F	V	V

- Una fbf formada por n-fbfs atómicas tiene $\mathbf{2^n}$ interpretaciones que denotaremos por **Ii** (i=1,… 2^n). Cada línea de la tabla de verdad es una interpretación de la fbf.
- Los elementos de Ii son una combinación de valores V y F de las componentes atómicas de la fbf. **Ej**: en la tabla anterior I2 = {A=V, B=F}.
- Dada una fbf-A si un conjunto Ii (i=1,… 2^n) correspondiente a la fila i de la tabla de verdad de la fbf-A hace que A tome el valor V se dice que Ii es una interpretación modelo de A; si por el contrario Ii hace que A se interprete como F, Ii es un contramodelo o contraejemplo de la fbf-A.
- Una **fbf se interpreta** o clasifica semánticamente como:
  - Tautología: Si todas las interpretaciones Ii (i=1,… 2^n) de la fbf son modelo.
  - Contradicción: Si todas las interpretaciones Ii (i=1,… 2^n) de la fbf son contramodelo o contraejemplo.
  - Contingencia: Si algunas interpretaciones son modelo y otras contramodelo.

CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE VERDAD

1º Se dibujan tantas filas como interpretaciones tenga la fbf.

2º Se dibuja una columna para cada variable proposicional diferente.

3º Según la jerarquía de las conectivas que aparecen en la fbf, se escribe una columna para cada una de las conectivas en el orden conveniente.

4º Se aplican reglas semánticas de las conectivas y se van rellenando las columnas con valores V o F.

5º La columna de la conectiva principal de la fbf determinará la evaluación semántica de la fbf.

EJ: Tabla de verdad de la fbf-1: $p \to q \wedge \neg p$

Prioridad en conectivas: $(p \to (q \wedge (\neg p)))$

	p	q	¬p	q ∧ ¬p	p → q ∧ ¬p
1	V	V	F	F	F
2	V	F	F	F	F
3	F	V	V	V	V
4	F	F	V	F	V

4 interpretaciones

I1 = {p=V, q=V}; contramodelo

I2 = {p=V, q=F}; contramodelo

I3 = {p=F, q=V}; modelo

I4 = {p=F, q=F} modelo

La fbf-1 se **interpreta** como contingencia ya que tiene interpretaciones modelo (filas 3 y 4) y contramodelo (filas 1 y 2)

EJ: Clasificar semánticamente la fbf-2: $p \to q \vee \neg q$

Prioridad: $(p \to (q \vee (\neg q)))$

	p	q	¬q	q v ¬q	p → q v ¬q
1	V	V	F	V	V
2	V	F	V	V	V
3	F	V	F	V	V
4	F	F	V	V	V

La fbf-2 es una tautología ya que todas sus interpretaciones Ii (i = 1,…4) son modelo.

MÉTODO DEL CONTRAEJEMPLO PARA INTERPRETAR FBFS PROPOSICIONALES

Se supone que la fbf es falsa, i.e, admite al menos una interpretación contraejemplo. Se buscan los valores de verdad de sus componentes atómicas. Si aparece alguna contradicción la fbf no puede ser falsa, es tautología.

EJ Interpretar la fbf-3 : $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ aplicando el método del contraejemplo.

Suponemos que la fbf-R **es falsa.** Esto significa que $(p \to q) \wedge (q \to r) = V$ (1) y $(p \to r) = F$ (2)

De (1) se deduce que: $(p \to q) = V$ y $(q \to r) = V$

De (2) se deduce que: p = V y r = F.

Si p = V y $(p \to q) = V$ entonces q = V.

Si q = V y $(q \to r) = V$, entonces r = V. Este valor se contradice con el que se deduce en (2).

Luego la fbf –R no puede ser falsa, no tiene ninguna interpretación contraejemplo, es decir, es una tautologia.

➢ INTERPRETACIÓN DE RAZONAMIENTOS

Interpretar un razonamiento es averiguar si es válido o correcto. Será válido si para todos los casos en los que se interpreten las fbfs premisas como verdaderas la conclusión también sea verdadera. No debe existir ningún caso en el cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, ya que esta situación indicará que el razonamiento no es válido.

Una interpretación contraejemplo de un razonamiento es un conjunto Ii de valores semánticos (V,F) de las componentes atómicas de las fbfs que conforman la estructura lógica del razonamiento, con el cual las premisas se interpretan como verdaderas y la conclusión como falsa. Es suficiente la existencia de una interpretación contraejemplo para afirmar que dicho razonamiento no es válido.

➢ MÉTODOS PARA INTERPRETAR RAZONAMIENTOS

1º La validez de un razonamiento se puede determinar a partir del siguiente resultado:

“Un razonamiento es válido si, y sólo si, su fórmula asociada es una tautología”

Fórmula asociada a un razonamiento: Un razonamiento con estructura **R: P1,…Pn ⇒ Q** se corresponde con la fórmula condicional **Fbf-R: P1 ∧ P2 ∧ … ∧ Pn → Q** (y sus formas equivalentes) siendo *n* un entero positivo. Se dice que la fbf-R es una fórmula asociada al razonamiento R.

Se puede estudiar si la **fbf-R es una tautología** usando una de las dos opciones de demostración:

- **Tablas de verdad:** se escribe la fbf -R en una tabla de verdad y se estudia si es una tautología.

EJ Estudiar la validez del razonamiento R: **P1: p → q; P2: q → r; Q: p → r,** a partir del estudio semántico de su fbf asociada Fbf-R : **(p → q) ∧ (q → r) → (p → r)** usando una tabla de verdad

				A	B	C		Fbf-R
	p	q	r	p → q	q → r	p → r	A ∧ B	A ∧ B → C
1	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F	F	V
3	V	F	V	F	V	V	F	V
4	V	F	F	F	V	F	F	V
5	F	V	V	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	V	V	V	V	V
8	F	F	F	F	F	F	F	V

En la columna Fbf-R se determina el valor semántico de la fórmula asociada al razonamiento R.

Como todas las interpretaciones I son modelo, la Fbf-R es una tautología, luego el razonamiento R es correcto

- **Método del contraejemplo**: se supone que la fbf-R asociada al razonamiento R es falsa, y se averigua si dicha fbf admite contraejemplo. Si en la suposición de la existencia de contraejemplo aparece una contradicción la fbf-R es tautología y por lo tanto R es correcto (ver Ej de la fbf-3).

2º La validez de un razonamiento se puede determinar estudiando la interpretación de su estructura lógica.

Una estructura es válida si siempre que las premisas se interpreten como verdaderas la conclusión también sea interpretada como verdadera.

Dado **R: P1, P2,…Pn $\Rightarrow$ Q,** se estudia si la estructura R es válida usando una de las dos opciones de demostración:

- **Tablas de verdad**: se construye una tabla de verdad con todas las fbfs de la estructura. Se buscan las filas en las cuales las premisas son verdaderas y se observa cuál es el valor de la conclusión. Si en todos los casos las premisas y la conclusión son verdaderas el razonamiento es válido.

EJ **R1: ¬A → B, ¬B ⇒ A**

A	B	¬A	¬B	P1: ¬A → B	P2: ¬B	Q: A
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

R1 **es válido** ya que en la fila 2 las premisas P1 y P2 son V y Q también.
Las demás filas no nos interesan.

EJ **R2: ¬A → B, B ⇒ ¬A**

A	B	¬A	P1: ¬A → B	P2: B	Q: ¬A
V	V	F	**V**	**V**	**F**
V	F	F	V	F	F
F	V	V	**V**	**V**	**V**
F	F	V	F	F	V

R2 **NO es válido** ya que en la fila 1 las premisas P1 y P2 son V y Q es F. En la fila 3 P1, P2 y Q son V , pero la interpretación que determina la validez de R2 es la de la fila 1.

- **Método del contraejemplo**: se supone que la estructura tiene una interpretación contraejemplo. Para ello se interpretan las premisas como verdaderas y la conclusión falsa. Se buscan los valores de verdad de las componentes atómicas de cada fbf. Si la suposición lleva a contradicción la estructura no admite la interpretación contraejemplo supuesta y entonces la estructura es válida; si no encontramos contradicción la estructura no es válida ya que admite contraejemplo.

EJ Sea el razonamiento: **R3: P1: A, P2: ¬B → A, Q: ¬B.** Se debe demostrar la validez de R3 aplicando el método del contraejemplo.

Para ello se comprueba si R3 tiene, al menos, una interpretación contraejemplo.

1º **Suponemos** que R3 admite una interpretación contraejemplo, es decir, se pueden interpretar las premisas P1, P2 como verdaderas (V) y la conclusión Q como falsa (F).

P1: A	P2: ¬B → A	Q: ¬ B
V	V	F

2º Se **demuestra su existencia.** Se debe comprobar si la hipótesis 1) es cierta. Para ello, y teniendo en cuenta las reglas semánticas de las conectivas, se calculan los valores de verdad de las fbfs atómicas que conforman las premisas y la conclusión, teniendo en cuenta la supuesta existencia del contraejemplo.

En el ejemplo tenemos que Q = F, es decir, ¬B = F.

Con esta hipótesis, P2 = V siempre, independientemente de que A = V o A = F (un condicional con antecedente F es siempre V).

Por hipótesis P1 = V, es decir, A = V. Luego para A = V, P1 y P2 son ciertas.

Como existe interpretación contraejemplo de R3 dada por el conjunto I = { A=V, B=V}, el razonamiento **R3 no es válido**.

¡OjO!: Es suficiente que exista una (pueden existir más) interpretación contraejemplo en un razonamiento para asegurar que no es correcto.

En los siguientes ejercicios se usarán los valores V, para cierto, F para falso y NS para indicar que no se puede saber con los datos que nos dan si la fbf es V o F.

EJERCICIO 12 Escribe una **interpretación modelo** y otra **contramodelo** para cada una de las expresiones Ei (i=1…5) siguientes. Si alguna interpretación de ese tipo no existe, explica por qué, pero para la que exista, interpreta con ella la fbf-Ei. Después, y según la existencia o no de ambas interpretaciones explica cómo se clasifica cada fbf-Ei.

1. **E1: Es cierto A y B a menos que lo sea C.**

Fbf-E1: $\neg(A \wedge B) \rightarrow C$	
Existe, al menos, una Interpretación modelo: **SI** Es I1 = { A=V, B=V, C=V } NO porque: La fbf-E1 para I1 se interpreta como: verdadera	Existe, al menos, una Interpretación contramodelo: **SI** Es I2 = { A=F, B=F, C=F }. NO porque: La fbf-E1 para I2 se interpreta como: falsa
La fbf-E1 se clasifica semánticamente como: contingente Porque: Existe al menos una interpretación modelo y otra contramodelo	

2. **E2: Si es cierto A entonces es cierto B, si y sólo si, o es falso A o es cierto B.**

Fbf-E2: $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$	
Existe, al menos, una Interpretación modelo **SI** Es I1 = { A=V, B=V } NO porque: La fbf-E2 para I1 se interpreta como: verdadera	Existe, al menos, una Interpretación contramodelo SI Es I2 = **NO** porque: no existen valores de A, B que hagan la fbf-E2 falsa. La fbf-E2 para I2 se interpreta como:
La fbf-E2 se clasifica semánticamente como: tautología Porque: no existe ninguna interpretación contramodelo que la haga F.	

3. **E3: Para que suceda A y B es necesario y suficiente que sea falso A o falso B.**

Fbf-E3: : $A \wedge B \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	
Existe, al menos, una Interpretación modelo SI Es I1 **NO** porque: no hay valores de A y B que hagan V la fbf La fbf-E3 para I1 se interpreta como: verdadera	Existe, al menos, una Interpretación contramodelo SI Es I2 = { A=F, B=V } NO porque: La fbf-E3 para I2 se interpreta como: falsa
La fbf-E3 se clasifica semánticamente como: contradicción Porque: No existe ninguna interpretación modelo.	

4. **E4: Sucede A, o no.**

Fbf-E4: : $A \vee \neg A$	
Existe, al menos, una Interpretación modelo **SI** Es I1 = { A=V} NO porque: La fbf-E4 para I1 se interpreta como: verdadera	Existe, al menos, una Interpretación contramodelo SI **NO** porque: siempre es verdadera La fbf-E4 para I2 se interpreta como:
La fbf-E4 se clasifica semánticamente como: tautología Porque: no existe ninguna interpretación contramodelo que la haga F.	

5. **E5: Si sucede A entonces es cierto B, si y sólo si, o es falso A o es cierto B.**

Fbf-E5: : $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$	
Existe, al menos, una Interpretación modelo **SI** Es I1 = { A=V, B=V} NO porque: La fbf-E5 para I1 se interpreta como: verdadera	Existe, al menos, una Interpretación contramodelo SI **NO** porque: siempre es verdadera La fbf-E5 para I2 se interpreta como:
La fbf-E5 se clasifica semánticamente como: tautología Porque: no existe ninguna interpretación contramodelo que la haga F.	

EJERCICIO 13 Si la fbf: **(p ∧ ¬q) → (r → ¬s)** es falsa, el valor de verdad de las variables proposicionales en el orden p, q, r, s, es:

a) **VFVV** b) FVVV c) VVFF d) VFFF e) VVVF

EJERCICIO 14 Si la fbf: **(p → ¬q) ∨ (¬r → s)** se interpreta como **falsa**, las siguientes fbfs se interpretan:

a)	(¬p ∧ ¬q) ∨ ¬q	V	**F**	NS
b)	(¬r ∨ q) ↔ [(¬q ∨ r) ∧ s]	V	**F**	NS
c)	(p → q) → [(p ∨ q) ∧ ¬q]	V	**F**	NS

EJERCICIO 15 Si la fbf: **s → ¬(p ∨ q)** y la variable **s** se interpretan como verdaderas, entonces las siguientes fbfs se interpretan como:

a)	¬(p ∧ ¬q)	**V**	F	NS
b)	(p → q) ∨ ¬s	**V**	F	NS
c)	s ∨ (q → p)	**V**	F	NS

EJERCICIO 16 Cuando la fbf: **[(p ∧ ¬q) ↔ (r → s)] → (¬s → r)** se interpreta como falsa, ¿cómo se interpreta la fbf**: [(w ∨ (p ∧ q)] ↔ (r → s) ∧ p?** Para averiguarlo reduce esta fbf a partir de los valores semánticos de las variables p, q, r, s que se obtienen de la fbf dada.

a) F

b) V

c) Depende del valor de la variable w.

d) Depende del valor de la variable r

e) Depende del valor de la proposición: w ∧ p

EJERCICIO 17 Si la fbf: **p** se interpreta como verdadera, ¿cómo se interpretan las siguientes fbfs?:

a)	(p ∨ q) ↔ (¬p ∧ ¬q)	V	**F**	NS
b)	(p ∧ q) → (p ∨ r)	V	F	**NS**
c)	(p → q) → r	V	F	**NS**

EJERCICIO 18 Si la fbf: **(p ∧ r) → (q ∨ s)** se interpreta como falsa, ¿cómo se interpretan las fbfs?

a)	p ∧ [x ∨ (r ∨ s)]	V	**F**	NS
b)	(q ∨ r ∨ y) → s	V	**F**	NS
c)	(q → x) → (y ∧ s)	V	**F**	NS
d)	(s → x) → (y ∧ ¬r)	V	**F**	NS

EJERCICIO 19 Si las fórmulas fbf: **$(p \wedge q)$** y fbf: **$(q \rightarrow t)$** se interpretan como falsas. ¿Cómo se interpretan las siguientes fbfs?

a) $(\neg p \vee t) \vee s$ **V** F NS

b) $\neg(p \wedge (\neg q \wedge \neg p))$ **V** F NS

c) $\neg p \vee (q \wedge \neg t)$ **V** F NS

EJERCICIO 20 Si la fbf: **$[(r \rightarrow s) \rightarrow t] \leftrightarrow [r \rightarrow (s \rightarrow t)]$** se interpreta como **falsa**. ¿Cómo se interpretan las siguientes fbfs?

a) $(r \leftrightarrow s) \rightarrow (s \leftrightarrow t)$ **V** F NS

b) $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (t \rightarrow s)$ **V** F NS

c) $[(r \rightarrow s) \leftrightarrow t] \leftrightarrow [r \leftrightarrow (s \leftrightarrow t)]$ V F **NS**

EJERCICIO 21 Indica el **número de interpretaciones (NºI)** y la e**valuación semántica (Ev)** de las siguientes fbfs proposicionales haciendo, si lo crees conveniente, la tabla de verdad:

1. **Fbf1: p**

Solución

Nº de variables proposicionales: 1 $\Rightarrow$ NºI (Fbf1) = $2^1 = 2$

Ev(Fbf1)= contingencia.

2. **Fbf2: $p \wedge q$**

Solución

Nº de variables proposicionales: 2 $\Rightarrow$ NºI (Fbf2) = $2^2 = 4$

Ev(Fbf2) = contingencia.

Tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. **Fbf3: $p \rightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$**

Solución

Nº de variables proposicionales: 2 $\Rightarrow$ NºI (Fbf3) = $2^2 = 4$

Ev(Fbf3) = tautología.

Tabla de verdad:

p	q	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \vee (q \wedge \neg q)$	$p \rightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V

EJERCICIO 22 ¿Cómo se debe interpretar variable proposicional -p- para que la fbf-A: $(p \to (p \to \neg p)) \to (p \to p \wedge \neg p)$ sea verdadera?

Solución

Como la fbf: p aparece como antecedente en todos los implicadores de la fbf-A. Es suficiente interpretar "p" como falsa para que dichos implicadores sean verdaderos y por lo tanto la fbf-A también sea verdadera.

EJERCICIO 23 ¿Cómo se debe interpretar la variable proposicional -p- para que la fbf-B: $\neg(p \wedge \neg p) \to p \wedge p$ sea verdadera?

Solución

La fbf: p, se debe interpretar como verdadera.

EJERCICIO 24 *"Si (<encendido> y <configurado> y <conectado>) entonces <accedo-servidor>*
Si <luce-piloto> entonces <encendido>
Si <icono-parpadea> entonces <conectado>"

1. Si <luce-piloto> e <icono-parpadea> entonces:
   - a1. <encendido> se interpreta como: | **V** F NS |
   - a2. <conectado> se interpreta como: | **V** F NS |
   - a3. <accedo-servidor> se interpreta como: | V F **NS** |

2. Si no <luce piloto> ni <icono parpadea> pero < accedo-servidor> entonces:
   - a1. No <encendido> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a2. No <conectado> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a3. <conectado> se interpreta como: | V F **NS** |

3. Si no <encendido> ni <conectado> ni <configurado> entonces:
   - a1. No <luce-piloto> se interpreta como: | **V** F NS |
   - a2. No <icono-parpadea> se interpreta como: | **V** F NS |
   - a3. No <accedo-servidor> se interpreta como: | V F **NS** |

4. Si no <encendido> o no <conectado> entonces:
   - a1. No <luce-piloto> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a2. No <icono-parpadea> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a3. No <accedo-servidor> se interpreta como: | V F **NS** |

5. Si <luce-piloto> o <icono-parpadea> o <configurado> entonces:
   - a1. <encendido> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a2. <conectado> se interpreta como: | V F **NS** |
   - a3. <accedo-servidor> se interpreta como: | V F **NS** |

T4: DEDUCCIÓN NATURAL

Se corresponde con el Paso 3 del cálculo lógico. Se ontendrán conclusiones manipulando sintácticamente las premisas.

Dado un conjunto de premisas P = {P1, P2,… Pn} se deben obtener las conclusiones *Qi a partir de las fbfs premisas Pi usando reglas de inferencia del sistema. El proceso de cálculo es el de deducción natural (en prácticas se verá la deducción automática).*

➢ DEDUCCIÓN

En general, una **deducción** o inferencia es el proceso que, en una secuencia de pasos, permite obtener fbfs a partir de otras aplicando reglas.

- *La **deducción natural** es el sistema formal que a partir de unas premisas y con aplicación de reglas básicas del sistema lógico obtiene determinadas conclusiones. Éstas se dicen que son derivadas de las premisas.*
- *Usaremos el sistema de reglas propuesto por Gentzen (1934) (ver hoja de reglas), que propone dos reglas (una de introducción y otra de eliminación) para cada conectiva y cuantificador. Si la regla básica introduce en su conclusión una conectiva que no aparece en sus premisas será una regla de introducción; si elimina de su conclusión una conectiva que aparece en sus premisas será una regla de eliminación.*
- *Este proceso que se basa en la aplicación de reglas a una fbf permite añadir o quitar símbolos lógicos de la fbf y así, por pura manipulación sintáctica, la fbf se desmonta hasta obtener sus componentes básicas (fórmulas atómicas) que se vuelven a montar en la configuración adecuada (fbf que queremos obtener como conclusión).*
- *Tendremos una deducción correcta cuando consigamos una secuencia finita de fbfs donde cada una de ellas se ha obtenido mediante la aplicación de alguna regla de inferencia. Todas las fbfs que aparecen en la deducción deben estar justificadas.*

➢ COMPONENTES DE UNA DEDUCCIÓN

Fórmulas premisas, fórmulas deducidas de otras, supuestos provisionales y reglas de inferencia**.**

- Fórmulas premisas: Fórmulas dadas como hipótesis que se admiten como ciertas.
- Fórmulas deducidas de otras: Fórmulas que se obtienen por aplicación de reglas de inferencia.
- Supuesto provisional: En cualquier paso de una deducción se puede introducir un supuesto provisional que es una sub-deducción de la deducción en la que se añade. Esta herramienta permite modularizar las deducciones y obtener un sub-objetivo más sencillo que el objetivo final pero nos lleva a él. La fbf con la que comienza el supuesto es una premisa de dicho supuesto y las fbfs que aparecen deducidas en el supuesto son inaccesibles fuera de él, sólo es válida la fbf final que se deduce del un supuesto cerrado. Para finalizar una deducción todos los supuestos abiertos en ella deben estar cerrados.

- Regla de inferencia básica: razonamiento propuesto por el sistema cuya validez ya ha sido comprobada.

  Ej: La regla MT (Modus Tollens): $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$, permite obtener la conclusión $\neg A$ a partir de las premisas: $A \rightarrow B, \neg B$.

ESTRATEGIAS PARA HACER UNA DEDUCCIÓN

- **Prueba Directa**: Si la fbf conclusión que se quiere obtener es de la forma: $A \rightarrow B$, se abre un supuesto provisional suponiendo cierta la fbf A y se aplican reglas hasta obtener la fbf B. El supuesto se cierra con la fbf B. En la siguiente línea se introduce la fbf $A \rightarrow B$, y se justifica dicha fbf escribiendo el nombre de la regla TD y las líneas donde aparecen las fbfs A y B.
- **Reducción al absurdo**: Se abre un supuesto suponiendo que es cierta la fbf negada que se quiere obtener. Se aplican reglas hasta obtener una contradicción. Se cierra el supuesto con dicha contradicción. Del supuesto se deduce la negación de la fbf premisa que se escribe en la siguiente línea junto con la regla IN, y las líneas donde empieza y se cierra el supuesto.

PASOS PARA HACER UNA DEDUCCIÓN

Una deducción es un conjunto de fbf escritas en líneas correlativas, por ello cada fórmula debe aparecer en una línea y debe estar numerada con el número de línea en la que se encuentran. Todas las fbfs de una deducción deben estar debidamente justificadas. Una deducción termina con la fbf conclusión.

1º Se escriben las fbfs premisas. Se justifican poniendo un guion delante del número de línea.

2º Se elige estrategia para hacer la deducción. Puede suceder que:

- Se añada una fbf deducida de otra(s). Se justifica escribiendo a la derecha de dicha fbf el nombre de la regla que se ha aplicado para obtenerla y el número de la(s) línea(s) de las fbfs que han intervenido en la deducción de ella.

- Se abra un supuesto provisional. Todo supuesto comienza con una fbf y ésta se justifica identando la línea donde aparece. Esta sangría se mantiene hasta que se cierra el supuesto.

3º La deducción finaliza con la fbf conclusión, ésta se justifica de la misma manera que una fbf deducida.

Se muestran varios ejemplos de cómo se hace una deducción

EJ Se demuestra por deducción natural que la fbf:-Q $\neg ma \rightarrow lo$ es una conclusión de las siguientes premisas:

P1: $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$, P2: $fa \rightarrow ma$, P3: $ca \rightarrow lo$

Como la conclusión tiene la forma del implicador, se realiza la deducción usando la estrategia de la **prueba directa**

-1 $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$

-2 $fa \rightarrow ma$

-3 $ca \rightarrow lo$

4	$\neg ma$	(supuesto cuya premisa es el antecedente de la implicación de la conclusión)
5	$\neg fa$	MT, 2, 4
6	$fa \vee ca$	EC, 1
7	ca	SD, 5, 6
8	lo	MP, 3, 7 (fbf que cierra el supuesto y que es el consecuente del implicador de la conclusión)
9	$\neg ma \rightarrow lo$	TD, 4-8

EJ Se demuestra por deducción natural que la fbf-Q: gp es una conclusión de las siguientes premisas:

P1: $rb \rightarrow mb$, P2: $mb \rightarrow bv \wedge gp$, P3: rb

Se realiza la deducción usando la estrategia de **reducción al absurdo**.

-1 $rb \rightarrow mb$

-2 $mb \rightarrow bv \wedge gp$

-3 rb

4	$\neg gp$	(supuesto cuya premisa es la negación de la conclusión)
5	mb	MP,1, 3
6	$bv \wedge gp$	MP, 2, 5
7	gp	EC, 6
8	$\neg gp \wedge gp$	IC,4, 7 (de la suposición 4 se deduce una contradicción)
9	gp	IN, 4-8 (no es cierta la fbf 4 sino su complementaria)

EJ Se demuestra por deducción natural que la fbf-Q: $\neg ap \wedge \neg fe$ es una conclusión de las siguientes premisas:

P1: $\neg(es \rightarrow ap \wedge fe)$, P2: $ap \wedge fe \rightarrow es$, P3: $\neg es$

Se realiza la deducción aplicando reglas de inferencia a las **premisas.**

-1 $\neg(es \rightarrow ap \wedge fe)$

-2 $ap \wedge fe \rightarrow es$

-3 $\neg es$

4	$\neg(\neg es \vee (ap \wedge fe)))$	DI$\vee$, 1
5	$\neg\neg es \wedge \neg(ap \wedge fe))$	Morgan, 4
6	$es \wedge \neg(ap \wedge fe))$	DN, 5
7	es	EC, 6
8	$es \wedge \neg es$	IC, 3, 7
9	$\neg ap \wedge \neg fe$	ECQ, 8

En los siguientes ejercicios sólo estudiaremos la validez de razonamientos formalizados con el lenguaje proposicional. Primero comprobaremos su validez aplicando algún método semántico y luego para los que sean válidos aplicaremos deducción natural para obtener la conclusión a partir de las premisas.

Raz-1 ***P1: "María y Pedro fueron al parque pero no de botellón".***

Q: "Al menos uno de ellos no fue al botellón"

Usa MC = { **mp:** Mª fue parque; **pp**: Pedro fue parque; **mb**: Mª fue botellón; **pb**: Pedro fue botellón }

Formalización:

Fbf-P1: $mp \wedge pp \wedge \neg mb \wedge \neg pb$

Fbf-Q: $\neg mb \vee \neg pb$

Estructura lógica R: $mp \wedge pp \wedge \neg mb \wedge \neg pb \Rightarrow \neg mb \vee \neg pb$

Interpretación: Se estudia la validez de R aplicando el método del contraejemplo.

Suponemos que R admite una interpretación contraejemplo:

Fbf-P1 = V y Fbf-Q = F.

Es decir: $mp \wedge pp \wedge \neg mb \wedge \neg pb = V$ (1)

$\neg mb \vee \neg pb = F$ (2)

De (1) se deduce que mp = V; pp = V; $\neg mb = V$; $\neg pb = V$.

De (2) se deduce $\neg mb = F$ y $\neg pb = F$.

En (1) la variable $\neg mb = V$ pero en (2) $\neg mb = F$.

Esta contradicción indica que la suposición de la existencia del contraejemplo fracasa.

Luego R es válido.

Deducción natural: Como R es válido Q se puede obtener de P1. Se aplican reglas de inferencia a la premisa P1.

-1	$mp \wedge pp \wedge \neg mb \wedge \neg pb$	
2	$\neg mb$	EC, 1
3	$\neg mb \vee \neg pb$	ID, 2

Raz-2 ***P1: “Para que el patio se moje es suficiente que llueva”.***

P2: “El patio se moja”.

Q: “Llueve”.

Formalización: MC = { **ll**: Llueve; **mo:** el patio se moja}

Fbf-P1: ll $\rightarrow$ mo;

Fbf-P2: mo;

Fbf-Q: ll

Estructura lógica R: ll $\rightarrow$ mo, mo $\Rightarrow$ ll

Interpretación: Se estudia la validez de R interpretando su estructura en una tabla de verdad.

	ll	mo	P1: ll $\rightarrow$ mo	P2: mo	Q: ll
1	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	F	F	F	V
3	F	V	**V**	**V**	**F**
4	F	F	V	F	F

En la fila 3 se interpretan las premisas como V y la conclusión F.

Luego R no es válido.

Deducción natural: No se puede deducir Q a partir de P1 y P2 ya que R no es válido.

Hasta cambiar de enunciado usar:

MC = {**A**: se enciende lámpara A; **B**: se enciende lámpara B; **L**: leemos; **D**: dormimos}

Raz-3 ***P1: "Si se enciende la lámpara A o la B entonces leemos"***

P2: "Se enciende la lámpara A"

Entonces ***Q: Leemos***

<u>Formalización</u>: Fbf-P1: $A \vee B \rightarrow L$;

Fbf-P2: A;

Fbf-Q: L

Estructura lógica R: $A \vee B \rightarrow L,\ A \Rightarrow L$

<u>Interpretación de R</u>: Se estudia la validez de R interpretando su estructura en una tabla de verdad.

	A	B	L	$A \vee B$	P1: $A \vee B \rightarrow L$	P2: A	Q: L
1	V	V	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	V	F	V	F	V	F
3	V	F	V	V	**V**	**V**	**V**
4	V	F	F	V	F	V	F
5	F	V	V	V	V	F	V
6	F	V	F	V	F	F	F
7	F	F	V	F	V	F	V
8	F	F	F	F	V	F	F

En las filas 1 y 3 se interpretan las premisas y la conclusión como V. No existe ninguna fila que sea una interpretación contraejemplo (premisas V y conclusión F).

Luego R es válido.

<u>Deducción natural</u>. Como R es válido, Q se puede obtener de P1 y P2. Aplicamos reglas de inferencia a las premisas.

-1 $A \vee B \rightarrow L$
-2 A
3 $A \vee B$ ID, 2
4 L MP, 1, 3

Raz-4 ***P1: "Si se enciende la lámpara A o la lámpara B entonces leemos"***

P2: "No se enciende A ni B"

Entonces ***Q: No leemos***

Formalización: Fbf-P1: $A \vee B \rightarrow L$;

Fbf-P2: $\neg A \wedge \neg B$;

Fbf-Q: $\neg L$

Estructura lógica R: $A \vee B \rightarrow L, \neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg L$

Interpretación: Se estudia la validez de R interpretando su estructura en una tabla de verdad.

	A	B	L	¬A	¬B	A ∨ B	P1: A ∨ B → L	P2:¬A ∧ ¬B	Q: ¬L
1	V	V	V	F	F	V	V	F	F
2	V	V	F	F	F	V	F	F	V
3	V	F	V	F	V	V	V	F	F
4	V	F	F	F	V	V	F	F	V
5	F	V	V	V	F	V	V	F	F
6	F	V	F	V	F	V	F	F	V
7	F	F	V	V	V	F	**V**	**V**	**F**
8	F	F	F	V	V	F	**V**	**V**	**V**

En las filas 7 y 8 se interpretan las premisas como V. Pero en la fila 7 Q es falsa.

Luego R no es válido.

Deducción natural Como R no es válido, Q no se puede obtener de P1 y P2.

Raz-5 ***P1: "Si se encienden las lámparas A y B entonces leemos"***

P2: "Al menos se enciende una lámpara"

Entonces, ***Q: Leemos***

Formalización: Fbf-P1: $A \wedge B \rightarrow L$;

Fbf-P2: $A \vee B$;

Fbf-Q: L

Estructura lógica R: $A \wedge B \rightarrow L, A \vee B \Rightarrow L$

Interpretación: Se estudia la validez de R interpretando su estructura en una tabla de verdad.

	A	B	L	$A \wedge B$	P1: $A \wedge B \rightarrow L$	P2: $A \vee B$	Q: L
1	V	V	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	V	F	V	F	V	F
3	V	F	V	F	**V**	**V**	**V**
4	V	F	F	F	V	V	F
5	F	V	V	F	**V**	**V**	**V**
6	F	V	F	F	**V**	**V**	**F**
7	F	F	V	F	V	F	V
8	F	F	F	F	V	F	F

En las filas 1, 3, 5 y 6 las premisas son V. En la fila 6 las premisas son V pero Q es F.

Luego R no es válido.

Deducción natural Como R no es válido, Q no se puede obtener de P1 y P2.

Raz-6 ***P1: "Si se enciende la lámpara A o la B entonces leemos, y si no, dormimos"***

P2: "Dormimos"

Entonces, ***Q: "No se ha encendido ninguna lámpara"***

Formalización: Fbf-P1: $A \vee B \rightarrow L$;

Fbf-P2: $\neg(A \vee B) \rightarrow D$;

Fbf-P3: D;

Fbf-Q: $\neg A \wedge \neg B$

Estructura lógica R: $A \vee B \rightarrow L,\ \neg(A \vee B) \rightarrow D,\ D \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$

Interpretación: Se estudia si la fórmula asociada a R es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

Fbf-R: $(A \vee B \rightarrow L) \wedge (\neg(A \vee B) \rightarrow D) \wedge D \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

- Suponemos Fbf-R = F. Entonces:

$(A \vee B \rightarrow L) \wedge (\neg(A \vee B) \rightarrow D) \wedge D = V$ (1)

$\neg A \wedge \neg B = F$ (2)

De (1) tenemos $(A \vee B \rightarrow L) = V$, $\neg(A \vee B) \rightarrow D = V$, $D = V$.

De (2) se deducen 3 posibilidades:

1ª $\neg A = V$, $\neg B = F$;

2ª $\neg A = F$, $\neg B = V$;

3ª $\neg A = F$, $\neg B = F$;

Elegimos una de ellas, por ejemplo, la 3º opción: $\neg A = F$, $\neg B = F$, es decir, A=V, B=V.

Con estos valores y L = F, la fbf: $A \vee B \rightarrow L = F$. Este valor se contradice con el que se deduce de (1), luego la fbf-R es falsa, al menos, para la interpretación I = { A = F, B = F, L = F, D = V}.

La Fbf-R no es tautología, luego R no es correcto.

Deducción natural Como R no es válido, Q no se puede obtener de P1, P2 y P3.

Raz-7 ***P1: "Si se encienden las lámparas A y B entonces leemos, y si no, dormimos"***

P2: "Dormimos"

Entonces, ***Q: "Al menos una lámpara no se ha encendido".***

Formalización: Fbf-P1: $A \wedge B \rightarrow L$;

Fbf-P2: $\neg(A \wedge B) \rightarrow D$;

Fbf-P3: D;

Fbf-Q: $\neg A \vee \neg B$

Estructura lógica R: $A \wedge B \rightarrow L,\ \neg(A \wedge B) \rightarrow D,\ D \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

Interpretación: Se estudia si la fórmula asociada a R es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

Fbf-R: $(A \wedge B \rightarrow L) \wedge (\neg(A \wedge B) \rightarrow D) \wedge D \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

- Suponemos Fbf-R = F. Entonces:

$(A \wedge B \rightarrow L) \wedge (\neg(A \wedge B) \rightarrow D) \wedge D = V$ (1)

$\neg A \vee \neg B = F$ (2)

De (1) tenemos $(A \wedge B \rightarrow L) = V$, $\neg(A \wedge B) \rightarrow D = V$, $D = V$.

De (2) se deduce: $\neg A = F$, $\neg B = F$; Luego $A = V$, $B = V$.

Para esto valores y tomando L = V, la fbf (1) es V y como la fbf (2) es F, la fbf admite al menos una interpretación contraejemplo, que es, I = { A = V, B = V, L = V, D = V}.

La Fbf-R no es tautología, luego R no es correcto.

Deducción natural Como R no es válido, Q no se puede obtener de P1, P2 y P3.

Raz-8 ***P1: "Si se encienden las lámparas A y B entonces leemos, y si no, dormimos"***

P2: "Al menos una lámpara no se ha encendido"

Entonces, ***Q: "Dormimos"***

Formalización: Fbf-P1: $A \wedge B \to L$;

Fbf-P2: $\neg(A \wedge B) \to D$;

Fbf-P3: $\neg A \vee \neg B$;

Fbf-Q: D.

Estructura lógica R: $A \wedge B \to L,\ \neg(A \wedge B) \to D,\ \neg A \vee \neg B \Rightarrow D$

Interpretación: Se estudia si la fórmula asociada a R es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

Estructura lógica R: $A \wedge B \to L,\ \neg(A \wedge B) \to D,\ \neg A \vee \neg B \Rightarrow D$

Fbf-R: $(A \wedge B \to L) \wedge (\neg(A \wedge B) \to D) \wedge (\neg A \vee \neg B) \to D$

- Suponemos Fbf-R = F. Entonces:

$(A \wedge B \to L) \wedge (\neg(A \wedge B) \to D) \wedge (\neg A \vee \neg B) = V$ (1)

$D = F$ (2)

De (1) tenemos $(A \wedge B \to L) = V$, $\neg(A \wedge B) \to D = V$, $(\neg A \vee \neg B) = V$.

Como D = F, para que $\neg(A \wedge B) \to D = V$ debe ser $\neg(A \wedge B) = F$, es decir, $\neg A \vee \neg B = F$, luego $\neg A = F$, $\neg B = F$.

estos valores se contradicen con los deducidos en (1). Luego la fbf no es falsa tal como se había supuesto.

La Fbf-R es tautología, luego R es correcto.

Deducción natural Como R es válido, Q se puede obtener de P1, P2 y P3. Estrategia: reducción al absurdo.

-1 $A \wedge B \to L$	
-2 $\neg(A \wedge B) \to D$	
-3 $\neg A \vee \neg B$	
4 $\neg D$	
5 $\neg\neg(A \wedge B)$	MT, 2, 4
6 $A \wedge B$	EN, 5
7 A	EC, 6
8 $\neg B$	SD, 3, 7
9 B	EC, 6
10 $B \wedge \neg B$	IC, 8, 9
11 $\neg\neg D$	TD, 4-10
12 D	EN, 11

Raz-9 ***P1: "Si se enciende la lámpara A o la B entonces leemos, y si no, dormimos"***

P2: "No leemos"

Entonces, ***Q: "Al menos una lámpara no se ha encendido"***

Formalización: Fbf-P1: $A \vee B \to L$;

Fbf-P2: $\neg(A \vee B) \to D$;

Fbf-P3: $\neg L$;

Fbf-Q: $\neg A \vee \neg B$

Estructura lógica R: $A \vee B \to L,\ \neg(A \vee B) \to D,\ \neg L \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

Interpretación: Se estudia si la fórmula asociada a R es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

Fbf-R: $(A \vee B \to L) \wedge (\neg(A \vee B) \to D) \wedge \neg L \to \neg A \vee \neg B$

- Suponemos Fbf-R = F. Entonces:

  $(A \vee B \to L) \wedge (\neg(A \vee B) \to D) \wedge \neg L = V$ (1)

  $\neg A \vee \neg B = F$ (2)

  De (1) se deduce $(A \vee B \to L) = V$, $\neg(A \vee B) \to D = V$, $\neg L = V$.

  De (2) se deduce sólo una posibilidad:

  $\neg A = F$ y $\neg B = F \Rightarrow A = V$ y $B = V$.

  Con esta interpretación de A y B, y con L = F tenemos que la fbf: $A \vee B \to L = F$, valor que se contradice con el que se deduce de (1). Luego la fbf-R no admite una interpretación contraejemplo que la haga falsa.

  La Fbf-R es tautología, luego R es válido.

Deducción natural Como R es válido, Q se puede obtener de P1, P2 y P3.

Estrategia: transformamos la conclusión $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow A \to \neg B$ (DI$\vee$) y aplicamos la prueba directa.

-1 $A \vee B \to L$	
-2 $\neg(A \vee B) \to D$	
-3 $\neg L$	
4 A	
5 $A \vee B$	ID, 4
6 L	MP, 1, 5
7 $L \wedge \neg L$	IC, 3, 6
8 $\neg B$	ECQ, 7
9 $A \to \neg B$	TD, 4-8

OjO: intenta hacer la deducción por reducción absurdo. ¿Qué fbf supondrías como cierta para obtener una contradicción?

Raz-10 ***P1: "Soy feliz sólo si canto".***

P2: "Es suficiente que cante para que sonría".

Q: "No soy feliz a menos que sonría".

Usar MC = { **fe**: soy feliz; **ca**: canto; **so**: sonrío}

Formalización: Fbf-P1: fe $\rightarrow$ ca;

Fbf-P2: ca $\rightarrow$ so;

Fbf-Q: fe $\rightarrow$ so

Estructura lógica R: fe $\rightarrow$ ca, ca $\rightarrow$ so $\Rightarrow$ fe $\rightarrow$ so

Interpretación: Se estudia la validez de R interpretando su estructura en una tabla de verdad.

	fe	ca	so	P1: fe $\rightarrow$ ca	P2: ca $\rightarrow$ so	Q: fe $\rightarrow$ so
1	V	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	**V**	**V**	**V**
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	**V**	**V**	**V**
8	F	F	F	**V**	**V**	**V**

En las filas 1, 5, 7 y 8 las premisas y la conclusión son V. No existen interpretaciones contraejemplo.

Luego R es válido.

Deducción natural Como R es válido, Q se puede obtener de P1 y P2. Estrategia: prueba directa:

-1 fe $\rightarrow$ ca

2 ca $\rightarrow$ so

3 fe

4 ca MP, 1, 3

5 so MP, 2, 4

6 fe $\rightarrow$ so TD, 3-5

Raz-11 *Anoche una banda de ladrones robó una joyería. Los sospechosos son Makinavaja, Popeye y el Pirata.*

Hipótesis:

P1: "Nadie aparte de estos tres estuvo involucrado en el robo" (al menos uno de los tres es culpable).

P2: "Popeye nunca trabaja sin un cómplice" (Si Popeye es culpable, Maki o Pirata también).

P3: "El Pirata dijo que era inocente" **(**El Pirata no es culpable).

Se debe averiguar cuál de los tres es culpable***.***

Usar MC = { **ma**: Maki es culpable; **pi**: Pirata es culpable; **po**: Popeye es culpable}

<u>Formalización</u>: Fbf-P1: ma $\vee$ pi $\vee$ po;

Fbf-P2: po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma;

Fbf-P3: ¬pi;

Fbf-Q1:po; Fbf-Q2: pi; Fbf-Q3: ma

Estructura lógica R1: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, ¬pi $\Rightarrow$ po

Estructura lógica R2: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, ¬pi $\Rightarrow$ pi

Estructura lógica R3: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, ¬pi $\Rightarrow$ ma

<u>Interpretación</u>: Se estudia si alguna de las tres estructuras admite una interpretación contraejemplo.

1) Estructura lógica R1: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, ¬pi $\Rightarrow$ po

Se demuestra si Popeye es culpable suponiendo que no lo es.

- Suponemos P1 = V, P2 = V, P3 = V y Q = F. Entonces:

(ma $\vee$ pi $\vee$ po) = V, (po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma) = V, ¬pi = V (1)

po = F (2)

De (1) se deduce que pi = F y de (2) que po = F.

Como pi = F y po = F, para que P1=V, tenemos que asignar a ma=V.

Con la siguiente interpretación contraejemplo I = {ma = V, po = F, pi = F} las premisas P1, P2 y P3 son verdaderas y Q es falsa.

Luego R1 no es válido.

2) Estructura lógica R2: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, $\neg$pi $\Rightarrow$ pi

Se demuestra si El Pirata es culpable suponiendo que no lo es.

- Suponemos P1 = V, P2 = V, P3 = V y Q = F. Entonces:

(ma $\vee$ pi $\vee$ po) = V, (po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma) = V, $\neg$pi = V (1)

pi = F (2)

Como pi = F, para que P1 = V, tenemos tres posibilidades:

1ª ma = V, po = F

2ª ma = V, po = V

3ª ma = F, po = V.

Con cualquiera de estas 3 posibilidades la premisa P2 es cierta, luego con la siguiente interpretación contraejemplo I = {ma = V, po = F, pi = F} las premisas P1, P2 y P3 son verdaderas y Q es falsa.

Luego R2 no es válido.

3) Estructura lógica R3: ma $\vee$ pi $\vee$ po, po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma, $\neg$pi $\Rightarrow$ ma

Se demuestra si Maki es culpable suponiendo que no lo es.

- Suponemos P1 = V, P2 = V, P3 = V y Q = F. Entonces

(ma $\vee$ pi $\vee$ po) = V, (po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma) = V, $\neg$pi = V (1)

ma = F (2)

De (1) se deduce que pi = F.

Para que P1 = V, y teniendo en cuenta que ma = F, pi = F, tenemos que interpretar po = V.

La interpretación I = { ma = F, pi = F, po = V} hace que P2 = F.

Esto se contradice con la hipótesis de que P2 = V.

No existe contraejemplo para R3, luego R3 es válido y por lo tanto Maki fue culpable del robo.

<u>Deducción natural</u>: Sólo se puede obtener a Maki. Estrategia: reducción al absurdo.

-1 ma $\vee$ pi $\vee$ po	
-2 po $\rightarrow$ pi $\vee$ ma	
-3 $\neg$pi	
4 $\neg$ma	
5 pi $\vee$ po	SD, 1, 3
6 po	SD, 3, 5
7 pi $\vee$ ma	MP, 2, 5
8 pi	SD, 4, 7
9 $\neg$pi $\wedge$ pi	IC, 3, 8
10 ma	IN, 4-9

Raz-12 ***P1: "Sólo si bebo vino en la cena, no bebo cerveza".***

P2: "Es suficiente que beba cerveza y vino para que no tome chinchón".

P3: "No bebo vino a menos que beba chinchón y cerveza".

Q: "Bebo cerveza"

Usar MC = { **vi**: bebo vino; **ce**: bebo cerveza; **ch**: bebo chinchón }

Formalización: Fbf-P1: $\neg ce \rightarrow vi$;

Fbf-P2: $ce \wedge vi \rightarrow \neg ch$;

Fbf-P3: $vi \rightarrow ce \wedge ch$;

Fbf-Q: ce

Estructura lógica R: $\neg ce \rightarrow vi,\ ce \wedge vi \rightarrow \neg ch,\ vi \rightarrow ce \wedge ch \Rightarrow ce$

Interpretación: Se estudia si la estructura R admite una interpretación contraejemplo usando tablas de verdad.

	ce	vi	ch	$\neg$ce	$\neg$ch	ce $\wedge$ vi	ce $\wedge$ ch	P1: $\neg ce \rightarrow vi$	P2: $ce \wedge vi \rightarrow \neg ch$	P3: $vi \rightarrow ce \wedge ch$	Q: ce
1	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	V
2	V	V	F	F	V	V	V	**V**	**V**	**V**	**V**
3	V	F	V	F	F	F	V	**V**	**V**	**V**	**V**
4	V	F	F	F	V	F	F	**V**	**V**	**V**	**V**
5	F	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F
6	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F
7	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F
8	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F

En las filas 2, 3 y 4 las premisas y la conclusión son V. No existen interpretaciones contraejemplo. Luego R es válido.

Deducción natural Estrategia: reducción al absurdo.

-1 $\neg ce \rightarrow vi$

-2 $ce \wedge vi \rightarrow \neg ch$

-3 $vi \rightarrow ce \wedge ch$

4 $\neg$ce

5 vi MP, 1, 4

6 $ce \wedge ch$ MP, 3, 5

7 $\neg$ch MP, 2, 6

8 ch EC, 6

9 $ch \wedge \neg ch$ IC, 7, 8

10 ce IN, 4-9

Raz-13 ***P1: "Si pierdes el boli, te quedas sin boli".***

P2: "Si te quedas sin boli, no copias apuntes".

P3: "Si no copias apuntes, no puedes estudiar".

P4: "Si no puedes estudiar, te sube la adrenalina".

P5: "Si te sube la adrenalina, te mueres".

Luego, ¿es cierto que "si no quieres morir, no tienes que perder el boli"?

Usar MC = { **pb**: pierde boli; **bo**: tienes bolis; **ap**: copias apuntes; **es**: estudias; **ad**: sube adrenalina; **mo**: mueres }

<u>Formalización</u>: Fbf-P1: $pb \rightarrow \neg bo$; Fbf-P2: $\neg bo \rightarrow \neg ap$; Fbf-P3: $\neg ap \rightarrow \neg es$;

Fbf-P4: $\neg es \rightarrow ad$; Fbf-P5: $ad \rightarrow mo$; Fbf-Q: $\neg mo \rightarrow \neg pb$

Estructura lógica R: $pb \rightarrow \neg bo,\ \neg bo \rightarrow \neg ap,\ \neg ap \rightarrow \neg es,\ \neg es \rightarrow ad,\ ad \rightarrow mo \Rightarrow \neg mo \rightarrow \neg pb$

<u>Interpretación</u>: Se demuestra si la fórmula asociada a R es una tautología buscando un contraejemplo en dicha fbf.

Fbf-R: $(pb \rightarrow \neg bo) \wedge (\neg bo \rightarrow \neg ap) \wedge (\neg ap \rightarrow \neg es) \wedge (\neg es \rightarrow ad) \wedge (ad \rightarrow mo) \rightarrow (\neg mo \rightarrow \neg pb)$

- Suponemos Fbf-R = F. Entonces:

$(pb \rightarrow \neg bo) = V$, $(\neg bo \rightarrow \neg ap) = V$, $(\neg ap \rightarrow \neg es) = V$, $(\neg es \rightarrow ad) = V$, $(ad \rightarrow mo) = V$ (1)

$\neg mo \rightarrow \neg pb = F$ (2)

De (2) se deduce que $\neg mo = V$ y $\neg pb = F$, luego $mo = F$ y $pb = V$.

Como $pb = V$, para que $pb \rightarrow \neg bo = V$, tiene que ser $\neg bo = V$.

Como $\neg bo = V$, para que $\neg bo \rightarrow \neg ap = V$, tiene que ser $\neg ap = V$.

Como $\neg ap = V$, para que $\neg ap \rightarrow \neg es = V$, tiene que ser $\neg es = V$.

Como $\neg es = V$, para que $\neg es \rightarrow \neg ad = V$, tiene que ser $\neg ad = V$.

Como $\neg ad = V$, para que $\neg ad \rightarrow mo = V$, tiene que ser $mo = V$.

De esta última interpretación se deduce una contradicción con lo deducido en (2) de que $mo = F$.

La fbf-R no puede ser falsa, es una tautología y por lo tanto R es válido.

<u>Deducción natural</u>: Estrategia: prueba directa.

-1	$pb \rightarrow \neg bo$	
-2	$\neg bo \rightarrow \neg ap$	
-3	$\neg ap \rightarrow \neg es$	
-4	$\neg es \rightarrow ad$	
-5	$ad \rightarrow mo$	
6	$\neg mo$	
7	$\neg ad$	MT, 5, 6
8	es	MT, 4, 7
9	ap	MT, 3, 8
10	bo	MT, 2, 9
11	$\neg pb$	MT, 1, 10
12	$mo \rightarrow \neg pb$	TD, 6-11

Raz-14 ***"Si eres alegre y haces reir a tus amigos aunque seas torpe, entonces eres un tipo OK, pero si no, eres KO".***
"No eres torpe pero eres alegre y haces reir a tus amigos" *entonces* ***¿qué clase de tipo eres?***

Usar MC = { **Al**: eres alegre; **Re**: haces reir; **To**: eres torpe; **OK**: tipo OK; **KO**: tipo KO }

Formalización: Fbf-P1: $Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK$; Fbf-P2: $\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO$; Fbf-P3: $Al \wedge Re \wedge \neg To$

Fbf-Q1: OK; Fbf-Q2: KO

Estructura lógica R1: $Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK,\ \neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO,\ Al \wedge Re \wedge \neg To \Rightarrow OK$;

Estructura lógica R2: $Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK,\ \neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO,\ Al \wedge Re \wedge \neg To \Rightarrow KO$;

Interpretación: Se demuestra si la fórmula asociada a R1 es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

1) Fbf-R1: $(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) \wedge (\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) \wedge (Al \wedge Re \wedge \neg To) \rightarrow OK$

- Suponemos Fbf-R1 = F. Entonces

$(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) \wedge (\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) \wedge (Al \wedge Re \wedge \neg To) = V$ (1)

OK =F (2)

De (1) se deduce $(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) =V$, $(\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) =V$, Al=V, Re=V, $\neg To = V$ (1)

Como OK=F, para que $Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK = V$, tiene que ser $Al \wedge Re \wedge To = F$.

De (1), $\neg To = V$ luego To = F. Esto hace que la fbf $(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) =V$.

También la fbf $(\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) = V$, ya que $\neg(Al \wedge Re \wedge To) = F$.

La fbf-R1 admite, al menos, una interpretación contraejemplo, I = {Al =V, Re = V, To = F, OK = F, KO = V}.

La fbf-R1 no es tautología por lo que R1 no es válido.

Se demuestra si la fbf-R2 asociada a R2 es una tautología aplicando el método del contraejemplo.

2) Fbf-R2: $(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) \wedge (\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) \wedge (Al \wedge Re \wedge \neg To) \rightarrow KO$

- Suponemos Fbf-R2 = F. Entonces

$(Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK) \wedge (\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO) \wedge (Al \wedge Re \wedge \neg To) = V$ (1)

KO =F (2)

Como KO = F, para que $\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO = V$, es $\neg(Al \wedge Re \wedge To) = F$, luego Al = V, Re = V, To = V. Este valor de To se contradice con el deducido en (1), donde $\neg To = V$. La fbf-R2 es tautología, R2 es válido.

Deducción natural: La deducción de R2 se hace por reducción al absurdo.

-1 $Al \wedge Re \wedge To \rightarrow OK$	
-2 $\neg(Al \wedge Re \wedge To) \rightarrow KO$	
-3 $Al \wedge Re \wedge \neg To$	
4 $\neg KO$	
5 $Al \wedge Re \wedge To$	MT, 2, 4
6 To	EC, 5
7 $\neg To$	EC, 3
8 $To \wedge \neg To$	IC, 6, 7
9 KO	IN, 4-8

Raz-15 ***"Si estudias entonces apruebas y eres feliz".***

"Como no has aprobado, se deduce que no has estudiado".

Usar MC = { **es**: estudias; **ap**: apruebas; **co**: haces los controles; **fe**: eres feliz}

Formalización:

Fbf-P1: es $\rightarrow$ ap $\wedge$ fe;

Fbf-P2: $\neg$ap;

Fbf-Q: $\neg$es

Estructura lógica R: es $\rightarrow$ ap $\wedge$ fe, $\neg$ap $\Rightarrow$ $\neg$es;

Interpretación: Se demuestra en una tabla de verdad si la fórmula asociada a R es una tautología.

- Fbf-R: (es $\rightarrow$ ap $\wedge$ fe) $\wedge$ $\neg$ap $\rightarrow$ $\neg$es

	es	ap	fe	P1: es $\rightarrow$ ap $\wedge$ fe	P2: $\neg$ap	P1 $\wedge$ P2	Q: $\neg$es	P1 $\wedge$ P2 $\rightarrow$ Q
1	V	V	V	V	F	F	F	**V**
2	V	V	F	F	F	F	F	**V**
3	V	F	V	F	V	F	F	**V**
4	V	F	F	F	V	F	F	**V**
5	F	V	V	V	F	F	V	**V**
6	F	V	F	V	F	F	V	**V**
7	F	F	V	V	V	V	V	**V**
8	F	F	F	V	V	V	V	**V**

La fbf-R es una tautología, luego R es válido.

Deducción natural: Estrategia: reducción al absurdo.

-1 es $\rightarrow$ ap $\wedge$ fe

-2 $\neg$ap

3 es

4 ap $\wedge$ fe MP, 1, 3

5 ap EC, 4

6 ap $\wedge$ $\neg$ap IC, 2, 5

7 $\neg$es IN, 3-6

Raz-16 ***"Al final no has estudiado y no has hecho los controles (Q) ya que has suspendido (no has aprobado) y no eres feliz (P1), y para aprobar y ser feliz era necesario que estudiaras y que hicieras los controles" (P2)".***

Usar MC = { **es**: estudias; **ap**: apruebas; **co**: haces los controles; **fe**: eres feliz}

Formalización: Fbf-P1: $\neg$ap $\wedge$ $\neg$fe;

Fbf-P2: ap $\wedge$ fe $\rightarrow$ es $\wedge$ co;

Fbf-Q: $\neg$es $\wedge$ $\neg$co

Estructura lógica R: ap $\rightarrow$ es $\wedge$ fe, $\neg$ap $\wedge$ fe $\Rightarrow$ $\neg$es

Interpretación: Se estudia la validez del razonamiento aplicando el método del contraejemplo a la estructura R.

Suponemos:

P1= V, P2 = V $\Rightarrow$ $\neg$ap $\wedge$ $\neg$fe = V y ap $\wedge$ fe $\rightarrow$ es $\wedge$ co = V (1)

Q = F $\Rightarrow$ $\neg$es $\wedge$ $\neg$co = F (2)

De (1) y P1 = V se deduce: $\neg$ap = V, $\neg$fe = V $\Rightarrow$ ap = F, fe = F $\Rightarrow$ ap $\wedge$ fe = F

Como ap $\wedge$ fe = F, entonces con estos valores de ap y fe tenemos que P2 = V.

De (2) se deducen 3 posibilidades:

1ª $\neg$es= V, $\neg$co = F;

2ª $\neg$es = F, $\neg$co = V;

3ª $\neg$es = F, $\neg$co = F;

Elegimos una de ellas, por ejemplo, la 3º opción: es=V, co=V. Con estos valores Q = F.

Luego R no es válido ya que existe al menos una interpretación contraejemplo I = { es = V, co = V, ap = F, fe = F }.

Deducción natural: No se puede deducir Q a partir de P1 y P2 ya que R no es válido.

Raz-17 ***"Sólo si estudias, apruebas".*** **(P1).**

"*Como no has aprobado aunque eres feliz*, (P2) *se deduce que no has estudiado"* (Q)

Usar MC = { **es**: estudias; **ap**: apruebas; **co**: haces los controles; **fe**: eres feliz}

Formalización: Fbf-P1: ap → es;

Ffbf-P2: ¬ap ∧ fe;

Fbf-Q: ¬es

Estructura lógica R: ap → es ∧ fe; ¬ap ∧ fe; Fbf-Q: ¬es;

Interpretación: Se demuestra en una tabla de verdad si la fórmula asociada a R es una tautología.

- Fbf-R: (ap → es) ∧ (¬ap ∧ fe) → ¬es

	es	ap	fe	P1: ap → es	P2: ¬ap ∧ fe	P1 ∧ P2	Q:¬es	P1 ∧ P2 → Q
1	V	V	V	V	F	F	F	**V**
2	V	V	F	V	F	F	F	**V**
3	V	F	V	V	V	V	F	**F**
4	V	F	F	V	F	V	F	**F**
5	F	V	V	F	F	F	V	**V**
6	F	V	F	F	F	F	V	**V**
7	F	F	V	V	V	V	V	**V**
8	F	F	F	V	F	F	V	**V**

En las filas 3 y 4 la fbf-R se interpreta como falsa. La fbf-R es contingencia, no es tautología, por lo que R no es correcto.

Deducción natural: No se puede deducir Q a partir de P1 y P2 ya que R no es válido.

Raz-18 ***"Para que apruebes y seas feliz no es suficiente que estudies (P1), es necesario (P2). Al final resulta que no has aprobado ni eres feliz (Q) puesto que no has estudiado (P3)".***

Usar MC = { **es**: estudias; **ap**: apruebas; **co**: haces los controles; **fe**: eres feliz}

Formalización: Fbf-P1: ¬(es → ap ∧ fe);

Fbf-P2: ap ∧ fe → es;

Fbf-P3: ¬es;

Fbf-Q: ¬ap ∧ ¬fe

Estructura lógica R: ¬(es → ap ∧ fe), ap ∧ fe → es, ¬es ⇒ ¬ap ∧ ¬fe

Interpretación: Se demuestra en una tabla de verdad si la fbf asociada a R es una tautología.

- Fbf-R: (¬(es → ap ∧ fe)) ∧ (ap ∧ fe → es) ∧ ¬es → ¬ap ∧ ¬fe

	es	ap	fe	P1: ¬ (es → ap ∧ fe)	P2: ap ∧ fe → es	P3: ¬es	P2 ∧ P2 ∧ P3	Q: ¬ap ∧ ¬fe	P2 ∧ P2 ∧ P3 → Q
1	V	V	V	F	V	F	F	F	V
2	V	V	F	V	V	F	F	V	V
3	V	F	V	V	V	F	F	F	V
4	V	F	F	V	V	F	F	V	V
5	F	V	V	F	F	V	F	F	V
6	F	V	F	F	V	V	F	V	V
7	F	F	V	F	V	V	F	F	V
8	F	F	F	F	V	V	F	V	V

Las 8 interpretaciones de la fbf-R son verdaderas, luego fbf-R es una tautología y R es correcto.

Deducción natural: Estrategia: aplicando reglas de inferencia a las premisas.

-1 ¬(es → ap ∧ fe)

-2 ap ∧ fe → es

-3 ¬es

4 ¬(¬es ∨ (ap ∧ fe)) DI∨, 1

5 ¬¬es ∧ ¬(ap ∧ fe)) Morgan, 4

6 es ∧ ¬(ap ∧ fe)) DN, 5

7 es EC, 6

8 es ∧ ¬es IC, 3, 7

9 ¬ap ∧ ¬fe ECQ, 8

Raz-19 "***No apruebas a menos que estudies o hagas todos los controles (P1).***
No sucede que, no apruebes o hagas los controles (P2)
Deduzco que has aprobado pero que no eres feliz (Q), puesto que no has estudiado ni has hecho los controles (P3)"

Usa MC = { **es**: estudias; **ap**: apruebas; **co**: haces los controles; **fe**: eres feliz}

<u>Formalización</u>: Fbf-P1: $ap \rightarrow es \vee co$;

Fbf-P2: $\neg(\neg ap \vee co)$;

Fbf-P3: $\neg es \wedge \neg co$;

Fbf-Q: $ap \wedge \neg fe$

Estructura lógica R: $ap \rightarrow es \vee co, \quad \neg(\neg ap \vee co), \quad \neg es \wedge \neg co \Rightarrow ap \wedge \neg fe$

<u>Interpretación:</u> Estudiamos la validez de la estructura R aplicando el método del contraejemplo.

Suponemos P1= V, P2 = V, P3 = V y Q = F.

Como P2 = V $\Rightarrow$ $\neg(\neg ap \vee co)$ = V $\Rightarrow$ $\neg ap \vee co$ = F, $\neg ap$ = F y co = F.

Como P1 = V $\Rightarrow$ como ap = V $\Rightarrow$ $es \vee co$ = V y como co = F $\Rightarrow$ es = V.

Como P3 = V $\Rightarrow$ $\neg es \wedge \neg co$ = V $\Rightarrow$ $\neg es$ = V y $\neg co$ = V $\Rightarrow$ es =F que se contradice con el valor obtenido en evaluación de P3. Como R no tiene interpretación contraejemplo, R es válido.

<u>Deducción natural</u>: Estrategia: se aplican reglas de inferencia a las premisas hasta encontrar una contradicción y entonces se aplica la regla ECQ.

-1 $ap \rightarrow es \vee co$	
-2 $\neg(\neg ap \vee co)$	
-3 $\neg es \wedge \neg co$	
4 $\neg es$	IC, 3
5 $\neg\neg ap \wedge \neg co$	Morgan, 2
6 $ap \wedge \neg co$	DN, 5
7 ap	EC, 6
8 $es \vee co$	MP, 1, 7
9 co	SD, 4, 8
10 $\neg co$	EC, 3
11 $co \wedge \neg co$	IC, 9, 10
12 $ap \wedge \neg fe$	ECQ, 11

Raz-20 ***"La Lógica es fácil a no ser que (a menos que) el profesor explique mal (P1), sin embargo, la lógica es fácil sólo si los alumnos no tienen miedo a formalizar (P2). Luego, es suficiente que los alumnos tengan miedo a formalizar para que el profesor explique mal (Q)".***

Usar MC = { **fc**: la lógica es fácil; **ml**: el profesor explica mal; **fr**: los alumnos tienen miedo a formalizar }

Formalización: Fbf-P1: ¬fc → ml;

Fbf-P2: fc → ¬fr;

Fbf-Q: fr → ml

Estructura lógica R: ¬fc → ml, fc → ¬fr ⇒ fr → ml

Interpretación: Se estudia la validez de la estructura R en una Tabla de verdad.

	fc	ml	fr	P1: ¬fc → ml	P2: fc → ¬fr	Q: fr → ml
1	V	V	V	V	F	V
2	V	V	F	**V**	**V**	**V**
3	V	F	V	V	F	F
	V	F	F	**V**	**V**	**V**
5	F	V	V	**V**	**V**	**V**
6	F	V	F	**V**	**V**	**V**
7	F	F	V	F	V	F
8	F	F	F	F	V	V

No existe ninguna fila en la cual las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa luego R es válido.

Deducción natural: Estrategia: prueba directa.

-1 ¬fc → ml

-2 fc → ¬fr

3 fr

4 ¬fc MT, 2, 3

5 ml MP, 1, 4

6 fr → ml TD, 3-5

Raz-21 ***"Aprobarás el examen de mates sólo si te animas a estudiar los domingos (P1). Para que seas un buen informático es suficiente que te animes a estudiar los domingos, sin embargo no es necesario que apruebes el examen de mates (P2). Por lo que, o no apruebas el examen de mates o eres un buen informático (Q)".***

Usar MC = {**ap**: apruebas examen mates; **in**: buen informático; **do**: te animas a estudiar domingos }

Formalización: Fbf-P1: $ap \to do$;

Fbf-P2: $(do \to in) \wedge \neg(in \to ap)$;

Fbf-Q: $\neg ap \vee in$

Estructura lógica R: $ap \to es \vee co$, $\neg(\neg ap \vee co)$, $\neg es \wedge \neg co \Rightarrow ap \wedge \neg fe$

Interpretación: Estudiamos la existencia de un contraejemplo en la estructura P1, P2 $\Rightarrow$ Q

Como P2: $(do \to in) \wedge \neg(in \to ap) = V \Rightarrow (do \to in)=V$ y $\neg(in \to ap)=V \Rightarrow (in \to ap) = F \Rightarrow in=V$ y $ap=F$.

Por otro lado, Q=F, por hipótesis, pero como ap = F (por P2) $\Rightarrow \neg ap=V \Rightarrow$ Q=V, contradicción.

Luego, como R no admite una interpretación contraejemplo, R es válido.

Deducción natural: Estrategia: reducción al absurdo.

-1 $ap \to do$	
-2 $(do \to in) \wedge \neg(in \to ap)$	
3 $\neg(\neg ap \vee in)$	
4 $\neg\neg ap \wedge \neg in$	de Morgan, 3
5 $ap \wedge \neg in$	DN, 4
6 ap	EC, 5
7 do	MP, 1, 6
8 $do \to in$	EC, 2
9 in	MP, 7, 8
10 $\neg in$	EC, 5
11 $in \wedge \neg in$	IC, 9, 10
12 $\neg ap \vee in$	IN, 3-11

Raz-22 ***"El profesor Lógicus se enfurruña a no ser que (a menos que) la profesora Chusita apruebe a los alumnos (P1). O la profesora Chusita no aprueba a los alumnos o éstos no hacen gansadas (P2). Luego, el profesor Lógicus se enfurruña a menos que la profesora Chusita apruebe a los alumnos o éstos no hagan gansadas" (Q).***

Usa MC = {**en**: profesor Lógicus se enfurruña; **ap**: profesora Chusita aprueba alumnos; **ga**: alumnos hacen gansadas}

Formalización: Fbf-P1: ¬en → ap;

Fbf-P2: ¬ap ∨ ¬ga;

Fbf-Q: ¬en → ap ∨ ¬ga

Estructura lógica R: ¬en → ap, ¬ap ∨ ¬ga ⇒ ¬en → ap ∨ ¬ga

Interpretación: Se demuestra en una Tabla de verdad si la fbf asociada a R es una tautología.

- Fbf asociada a R: (¬en → ap) ∧ (¬ap ∨ ¬ga) → (¬en → ap ∨ ¬ga)

	en	ap	ga	¬en	¬ap	¬ga	A: ¬en → ap	B: ¬ap ∨ ¬ga	A ∧ B	C: ap ∨ ¬ga	D: ¬en → C	A ∧ B → D
1	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	**V**
2	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	**V**
3	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	**V**
4	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	**V**
5	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	**V**
6	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	**V**
7	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	**V**
8	F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	**V**

Las 8 interpretaciones de la fbf-R son verdaderas, luego fbf-R es una tautología y R es correcto.

Deducción natural Estrategia: la prueba directa.

-1 ¬en → ap

-2 ¬ap ∨ ¬ ga

3 ¬en

4 ap MP, 1, 3

5 ap ∨ ¬ga ID, 4

6 ¬en → ap ∨ ¬ga TD, 3-5

Raz-23 ***"Para que suceda A es necesario que no suceda B (P1), sin embargo sí es necesario que ocurra C para que no suceda A (P2). Se cumple E a menos que suceda F (P3) pero sólo si es cierto D se puede asegurar que es cierto E (P4). Luego, si es cierto B lo es C, y si no es cierto F es cierto D (Q)".***

Usar las mismas letras de proposiciones para las variables proposicionales

Formalización: Fbf-P1: $A \to \neg B$;

Fbf-P2: $\neg A \to C$;

Fbf-P3: $\neg E \to F$;

Fbf-P4: $E \to D$;

Fbf-Q: $(B \to C) \wedge (\neg F \to D)$

Estructura lógica R: $A \to \neg B, \quad \neg A \to C, \quad \neg E \to F, \quad E \to D \Rightarrow (B \to C) \wedge (\neg F \to D)$

Interpretación: Estudiamos la existencia de un contraejemplo en la estructura R: P1, P2, P3, P4 $\Rightarrow$ Q

Suponemos que P1= V, P2 = V, P3 = V, P4 = V y Q = F.

Puede suceder que Q=F porque $B \to C$ = F, entonces B = V y C = F. Con esta interpretación tenemos que $\neg B$ = F.

Para que P1 = V, si $\neg B$=F entonces debe ser A = F, pero si esto sucede la premisa P2 = F, ya que C = F (por Q).

Contradicción.

Si Q = F porque $\neg F \to D$ = F, entonces $\neg F$=V y D=F, con esta interpretación para que P3=V debe ser $\neg E$=F $\Rightarrow$ E=V, pero con esta interpretación P4=F. Contradicción.

Q no puede ser falsa y las premisas verdaderas, luego no existe contraejemplo, y por lo tanto R es válido.

Deducción natural Estrategia: prueba directa a cada sub-fórmula de la conclusión.

- 1 $A \to \neg B$
- 2 $\neg A \to C$
- 3 $\neg E \to F$
- 4 $E \to D \quad \Rightarrow \quad (B \to C) \wedge (\neg F \to D)$

5 B	(suponemos cierta la fbf antecedente de un condicional de la conclusión)
6 $B \to \neg A$	CTP, 1
7 $\neg A$	MP, 5, 6
8 C	MP, 2, 7 (deducimos la fbf consecuente del implicador)
9 $B \to C$	TD 5-8
10 $\neg F$	(suponemos cierta la fbf antecedente de un condicional de la conclusión)
11 $\neg F \to \neg E$	CTP, 3
12 $\neg E$	MP, 9, 10
13 D	MP, 3, 11 (deducimos la fbf consecuente del implicador)
14 $\neg F \to D$	TD, 9-11
15 $(B \to C) \wedge (\neg F \to D)$	IC, 9, 14

Raz-24 ***"Voy a la facultad o me quedo en casa pero no ambas cosas (P1). Para que vaya a la facultad es necesario que vaya a clase de mates (P2) y para que estudie lógica es suficiente que me quede en casa (P3). Luego estudio lógica ya que no voy a clase de mates (Q)".***

Usar MC = { **fa**: voy a la facultad; **ca**: me quedo en casa; **ma**: voy a clase de mates; **lo**: estudio lógica }

Formalización: Fbf-P1: $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$;

Fbf-P2: $fa \rightarrow ma$;

Fbf-P3: $ca \rightarrow lo$;

Fbf-Q: $\neg ma \rightarrow lo$

Estructura lógica R: $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$, $fa \rightarrow ma$, $ca \rightarrow lo$ $\Rightarrow$ $\neg ma \rightarrow lo$

Interpretación: Estudiamos la existencia de un contraejemplo en la estructura R: P1, P2, P3 $\Rightarrow$ Q

Suponemos P1= V, P2 = V, P3 = V y Q = F.

Como Q=F $\Rightarrow$ $\neg$ma=V y lo=F.

Como P3=V y ma=F $\Rightarrow$ fa=F.

Para que P1=V como fa=F $\Rightarrow$ ca=V

Si ca=V la premisa P3=F.

Contradicción con la suposición inicial. Luego R es válido.

Deducción natural Estrategia: prueba directa.

-1 $(fa \vee ca) \wedge \neg(fa \wedge ca)$

-2 $fa \rightarrow ma$

-3 $ca \rightarrow lo$ $\Rightarrow$ $\neg ma \rightarrow lo$

4 $\neg ma$

5 $\neg fa$ MT, 2, 4

6 $fa \vee ca$ EC, 1

7 ca SD, 5, 6

8 lo MP, 3, 7

9 $\neg ma \rightarrow lo$ TD, 4-8

Raz-25 ***"Si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola blanca se mueve (P1). Es suficiente que la bola blanca se mueva para que golpee a la bola verde y ganes la partida (P2)".***

Demuestra si es cierto que:

"Has ganado la partida (Q) porque la bola roja ha golpeado a la bola blanca (P3)."

Usa MC = { **rb**: bola roja golpea bola blanca; **bv**: bola blanca golpea bola verde;
gp: ganas la partida; **mb**: bola blanca se mueve }

<u>Formalización</u>:

Fbf-P1: $rb \to mb$;

Fbf-P2: $mb \to bv \wedge gp$;

Fbf-P3: rb;

Fbf-Q: gp

Estructura lógica R: $rb \to mb,\ \ mb \to bv \wedge gp,\ \ rb \ \Rightarrow\ gp$

<u>Interpretación</u> Estudiamos la existencia de un contraejemplo en la estructura R: P1, P2, P3 $\Rightarrow$ Q

Suponemos P1= V, P2 = V, P3 = V y Q1 = F.

Como Q=F $\Rightarrow$ gp=F.

Si gp=F $\Rightarrow$ $bv \wedge gp$=F entonces para que la premisa P2=V, tiene que ser mb=F.

Si mb=F, para que la premisa P1=V tiene que ser rb=F, pero este valor se contradice con el de la premisa P3 donde rb=V. Contradicción.

Luego razonamiento R es válido.

<u>Deducción natural</u> Estrategia: reducción al absurdo.

-1 $rb \to mb$		
-2 $mb \to bv \wedge gp$		
-3 rb	$\Rightarrow$	gp
	4 $\neg gp$	
	5 mb	MP, 1, 3
	6 $bv \wedge gp$	MP, 2, 5
	7 gp	EC, 6
	8 $\neg gp \wedge gp$	IC, 4, 7
9 gp		IN, 4-8

Raz-26 ***"Para que la bola roja golpee a la bola blanca es necesario que la bola blanca se mueva. La bola azul golpea a la bola verde sólo si ganas la partida. O la bola roja golpea a la bola blanca o la bola azul golpea a la bola verde. Luego o la bola blanca se mueve o ganas la partida".***

Usa MC = { **rb**: bola roja golpea bola blanca; **bv**: bola blanca golpea bola verde;
gp: ganas la partida; **mb**: bola blanca se mueve }

Formalización: Fbf-P1: $rb \rightarrow mb$;

Fbf-P2: $av \rightarrow gp$;

Fbf-P3: $rb \vee av$;

Fbf-Q: $mb \vee gp$

Estructura lógica R: $rb \rightarrow mb,\ \ av \rightarrow gp,\ rb \vee av \ \Rightarrow\ mb \vee gp$

Interpretación: Estudiamos la existencia de un contraejemplo en la estructura R: P1, P2, P3 $\Rightarrow$ Q

Suponemos P1= V, P2 = V, P3 = V y Q1 = F.

Como Q=F $\Rightarrow$ $mb \vee gp$ = F $\Rightarrow$ mb =F y gp = F

Si gp=F, para que la premisa P2 = V, debe ser av = F;

Para que la premisa P3 = V, como av = F, tiene que ser rb = V;

Si rb = V, y mb = F (por Q) tenemos que P1 = F.

Luego, no existe contraejemplo que interprete todas las premisas como V y Q como F.

Luego R es válido.

Deducción natural Estrategia: reducción al absurdo.

-1 $rb \rightarrow mb$		
-2 $av \rightarrow gp$		
-3 $rb \vee av$	$\Rightarrow$	$mb \vee gp$
4 $\neg(mb \vee gp)$		
5 $\neg mb \wedge \neg gp$		de Morgan, 4
6 $\neg gp$		EC, 5
7 $\neg av$		MT, 2, 6
8 rb		SD, 3, 7
9 mb		MP, 1, 8
10 $\neg mb$		EC, 5
11 $mb \wedge \neg mb$		IC, 9, 10
12 $mb \vee gp$		IN, 4-11

Raz-27 ***"Puesto que los alumnos copian las prácticas a no ser que el profesor lo impida y el profesor no lo impide a menos que tenga un día malo, se infiere que es suficiente que el profesor no tenga un día malo para que los alumnos copien las prácticas".***

Usa MC = { **im**: profesor impide que copies; **cp**: alumnos copian prácticas; **ml**: profesor tiene día malo }

Formalización: Fbf-P1: $\neg im \rightarrow cp$;

Fbf-P2: $im \rightarrow ml$;

Fbf-Q: $\neg ml \rightarrow cp$

Estructura lógica R: $\neg im \rightarrow cp,\quad im \rightarrow ml \;\Rightarrow\; \neg ml \rightarrow cp$

Interpretación: Se interpreta la estructura R: P1, P2 $\Rightarrow$ Q en una Tabla de verdad.

	im	cp	ml	¬im	¬ml	P1: ¬im → cp	P2: im → ml	Q: ¬ml → cp
1	V	V	V	F	F	**V**	**V**	**V**
2	V	V	F	F	V	V	F	V
3	V	F	V	F	F	**V**	**V**	**V**
4	V	F	F	F	V	V	F	F
5	F	V	V	V	F	**V**	**V**	**V**
6	F	V	F	V	V	**V**	**V**	**V**
7	F	F	V	V	F	F	V	V
8	F	F	F	V	V	F	V	F

La estructura R es válida ya que en las filas 1, 3, 5 y 6 donde las premisas son V la conclusión también lo es.

Las otras filas no nos interesan.

Deducción natural Estrategia: prueba directa.

-1 $\neg im \rightarrow cp$

-2 $im \rightarrow ml$ $\Rightarrow$ $\neg ml \rightarrow cp$

4 $\neg ml$

5 $\neg im$ MT, 2, 4

6 cp MP, 1, 5

7 $\neg ml \rightarrow cp$ TD, 4-6

RESUMEN: Pasos para realizar el estudio de la validez de razonamientos en lógica de primer orden

Paso 1.- Formalización del razonamiento y obtención de su estructura lógica.

Paso 2.- Estudio de la validez del razonamiento interpretando su estructura lógica usando Tablas de verdad o el Método del contraejemplo.

- Interpretación de la estructura lógica a partir del estudio semántico de su fbf asociada:

  Se aplica el resultado: *"Un razonamiento es válido si, y sólo si, su fbf asociada es una tautología".*

  Dada la estructura R: $P1,\ldots Pn \Rightarrow Q$, una fbf asociada a ella es, por ejemplo, $P1 \wedge P2\ldots \wedge Pn \rightarrow Q$.

  Se estudia si la fbf asociada es tautología:

  - Usando Tablas de verdad: se escribe la fbf en una tabla de verdad y se interpreta. Si la fbf es una tautología el razonamiento es válido. En otro caso, no es válido.
  - Con el Método del contraejemplo: se supone que la fbf es falsa, admite al menos una interpretación contraejemplo. Se buscan los valores de verdad de sus componentes atómicas y se comprueba si aparece contradicción. Si aparece, la fbf es tautología.

- Interpretación de las fbfs premisas y conclusión:

  - Usando tablas de verdad: se construye una tabla de verdad con todas las fbfs de la estructura. Se buscan las filas en las cuales las premisas son verdaderas y se observa cuál es el valor de la conclusión. Si en todos los casos en los que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es, el razonamiento es válido.
  - Con el Método del contraejemplo: se supone que la estructura tiene una interpretación contraejemplo. Se interpretan las premisas como verdaderas y la conclusión falsa y se comprueba si esta suposición nos lleva a contradicción buscando los valores de verdad de las componentes atómicas de cada fbf. Si aparece contradicción, la estructura no admite contraejemplo, por lo que es válida; si no, estructura no válida.

Paso 3.- Si el razonamiento es válido se aplicará deducción natural para demostrar sintácticamente cómo se puede obtener la conclusión a partir de las premisas usando reglas de inferencia.

- Deducción natural:
  - Se escriben las fbfs premisas en líneas sucesivas numeradas.
  - Se elige estrategia para realizar la deducción.
  - Se aplican reglas de inferencia a las fbfs hasta conseguir la fbf conclusión.
  - Si es necesario se añaden supuestos provisionales para ir obteniendo nuevas fbfs.

🕮 Libros donde encontrar más ejercicios

✎ ***Lógica Formal para Informáticos***
Lourdes Arenas Alegrías.Ediciones Díaz de Santos, S. A., Madrid 1996.

✎ ***Lógica de Primer Orden***
Mª Jesús Castel y Faraón Llorens. Dpto. Ciencia de la Computación e IA. Universidad de Alicante, 1999.

✎ ***Lógica Informática***
José Cuena. Alianza Editorial, S.A., 1985.

✎ ***Lógica Simbólica***
Manuel Garrido. Editorial Tecnos, S.A. 2ª ed. 1991.

Lógica de predicados: http://di002.edv.uniovi.es/~labra/FTP/LPRED.pdf